# バイオメカニズム特論

第２回講義内容　スケーリング

１．血管の３乗則（続き）

２．動物の跳躍高さ

３．基礎代謝量0.75乗則

４．0.75乗則の二つの学説

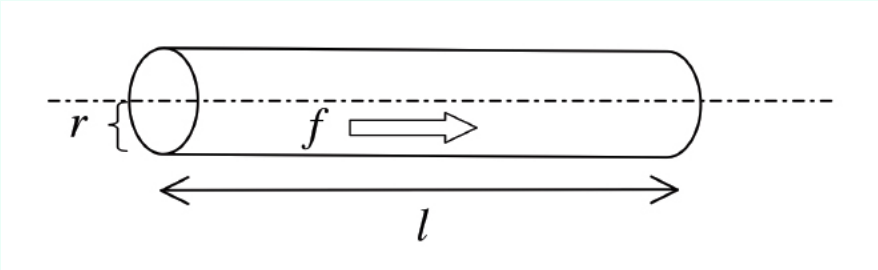
4.1　弾性相似則に基づくモデル

4.2　フラクタル構造に基づくモデル

# Murray の最小仕事モデル（続き）

$$F = E_m + E_c = \Delta p f + kV \quad (k\text{は定数})$$

$$f = \frac{\Delta p}{l}\frac{\pi r^4}{8\mu} \quad \text{より}$$




$$F = \frac{8\mu f^2 l}{\pi r^4} + k\pi r^2 l$$

仮定：血管内はポアズイユ流れ
（両端の圧力差を$\Delta p$とする．）

$F$の最小値を求めるために$F$を$r$で偏微分すると
以下の関係式が得られる．

$$\frac{f}{r^3} = \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{k}{\mu}} = const.$$

# 別解：血管の適応フィードバックによる3乗則の導出

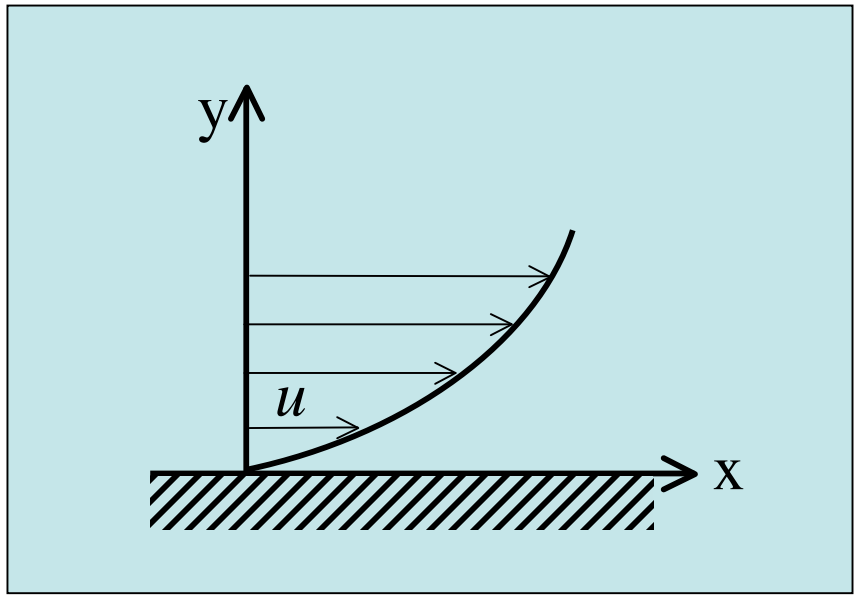
血管の３乗則は血管半径の大小を問わず成立.

→血管自身が血流を把握する機能があるはず.

→学説：血管内壁に作用するずり応力を検出（神谷ら，1980）

ずり応力

$$\tau = \frac{du}{dy} \cdot \mu$$

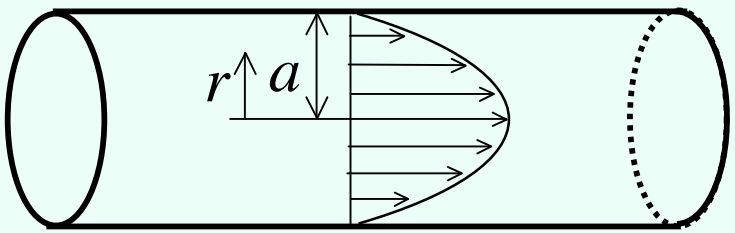


# 円管内ずり応力の導出

管内流れ　$u = \left(-\frac{dp}{dx}\right)\frac{1}{4\mu}a^2\left\{1-\left(\frac{r}{a}\right)^2\right\}$

$f = \left(-\frac{dp}{dx}\right)\frac{\pi a^4}{8\mu}$　の関係から

$$u = \frac{2f}{\pi a^2}\left\{1-\left(\frac{r}{a}\right)^2\right\}$$




$$\tau = \mu \left.\frac{du}{dr}\right|_{r=a} =$$

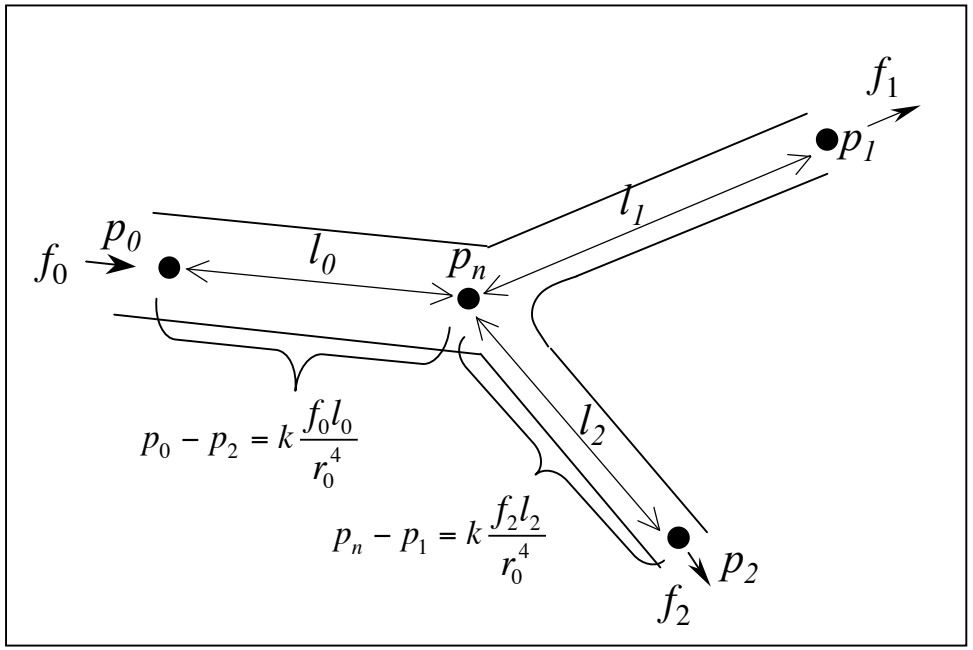
←この計算をしてみよう.

（上図の座標の取り方に注意.）

# 血液量最小による3乗則の導出

Kamiya and Togawaらの方法（1972）

◎圧力差$\Delta p_1 = p_1 - p_0$，$\Delta p_2 = p_2 - p_0$を一定とした時に管内の血液量が最小となる条件を求める．（端点の圧力，$p_0, p_1, p_2$と各血管の流量 $f_0, f_1, f_2$ が与えられている．）




$$\frac{r_0^6}{f_0} = \frac{r_1^6}{f_1} + \frac{r_2^6}{f_2}$$

# 動物の寿命

ほ乳類

$$t_{life} = 11.8 M_b^{0.20}$$

鳥類

$$t_{life} = 28.3 M_b^{0.19}$$

"Scaling" by
Scmidt-Nielsen より

なぜ0.2乗則になるのか合理的に説明できない.

ほ乳類は例外か？　体重60kg で27歳！（50kg→25歳）

本川達雄「ゾウの時間ネズミの時間」中公新書

# 人間の寿命

「世界の平均寿命，40年で19歳延びる
46歳→65歳」
朝日新聞夕刊 1994.6.13

平安時代頃の寿命は？

立川昭二：日本人の病歴（中公新書）、鬼頭宏：日本二千年の人口史（PHP研究所）によれば20〜30歳らしい.

参考：イヌも最近１２年間で3歳寿命が延びた（農工大調査）.

# アロメトリーの解釈の注意

## 体重が大きい方が寿命が長いか？

長寿の人は，一般にやせている人が多いように思う．
霊長類では，係数が異なると考えても式は正しいのだろうか．

ほ乳類 $$t_{life} = 11.8 M_b^{0.20}$$

上式は種の間の関係を示しているが種内については対象外．（同一の種で体重と寿命を議論することはできない．）

ちなみにチワワとセントバーナード犬では，チワワの方が長生きである．

# スケーリングのまとめ

・ スケーリングは，現象の本質を理解するのに強力な手法である.

・ スケーリングの導出は，簡単そうにみえるが，実は難しい. 総合的な知識と現象の本質を捉える力が必要である. モデルを限界まで単純化しているために，本質的なファクターが抜けると，無意味な関係式が出てくる恐れがある.

・ 単純化したことによって，細かい特徴は表現できないことに留意する必要がある. 得られた法則で前提条件を無視して対象を解釈しようとするのは危険である.

# 動物の代謝率

生物の質量$M_b$と安静時の単位時間当たりの代謝エネルギーPとの間には，両対数軸上できれいな線形関係が成立している.

Mouse-to-elephant curve

$$P_{met}=70\ M_b^{0.75}$$

From *Scaling*, K.S.Nielsen

# 人の代謝エネルギー

年齢別基礎代謝量とエネルギー所要量

| 年齢 | 基礎代謝量<br>kcal/日 (男／女) | エネルギー所要量<br>kcal/日 (男／女) |
|---|---|---|
| 18～29 | 1,550/1,210 | 2,000/1,550 |
| 30～49 | 1,500/1,170 | 1,950/1,500 |
| 50～69 | 1,350/1,110 | 1,750/1,450 |
| 70 以上 | 1,220/1,010 | 1,600/1,300 |

出典：「第 6 次改訂日本人の栄養所要量について」厚生労働省
「2002 新食品成分表　FOODS」一橋出版
(http://www2.health.ne.jp/library/3000/w3000657.html)

$1550 \times 1000 \div (60 \times 60 \times 24) \fallingdotseq 18$ [cal/sec]

# 基礎代謝量と生物の質量の関係

$$P \propto M_b^{0.75}$$

0.75乗則

単位質量あたりでは

$$P_u \propto M_b^{-0.25}$$

# 熱放散の考え方では指数はいくつになるか.

まず，生物の形を球体（半径r）と仮定して指数を求めよ.

ヒント：

生物の質量$M_b$は$r^3$に比例

身体から出る熱量は表面積Sに比例.（Sは$r^2$に比例）

単位時間当たりの熱量が基礎代謝率Pに比例.

Pと$M_b$の関係から指数は．．．

つぎに，生物の形を円柱と仮定しても0.75にはならないことを示せ.

（体表面積が最小となる条件下でも0.75が得られないことを示せ．）

# 指数0.75の導出

McMahon（1973年）の学説

基本的な考え方：

地上（重力下）で動物が体躯の形状を維持するには筋肉を活動させる必要があり，これが基礎代謝量に関係していると考える．（胴体が大きければ，筋肉の断面積も増えるが質量も増加する．胴体を弾性体と仮定すると，動物の胴体の長さと質量の間には，折れ曲がりにくさに関して相似的な関係があると予想される．）

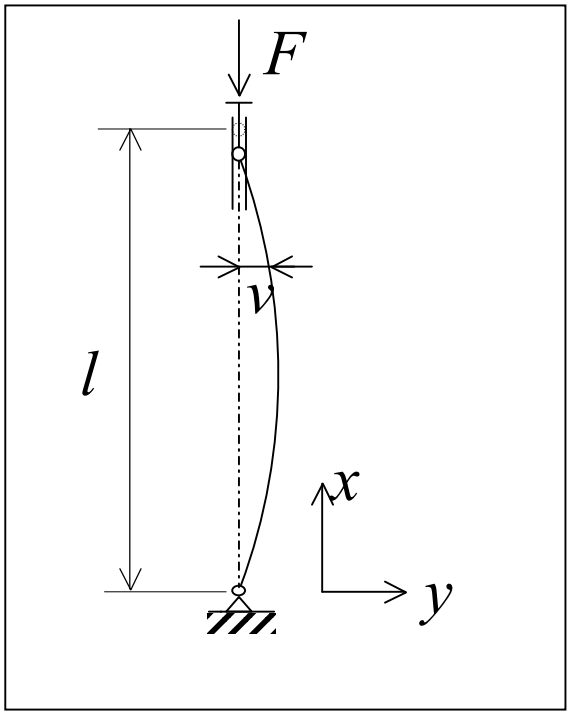
# 弾性相似則を適用

身体の折れ曲がりにくさを数式で表現

↓

弾性はりの座屈条件を利用

$$F = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$




$E$: ヤング率

$I$: 断面二次モーメント

# 弾性相似則（続き）

$F$ は胴体の重量に比例すると仮定

$$F \propto \pi d^2 l \rho g$$

$\rho$: 見かけ上の密度

$g$: 重力加速度

$d$ :胴体の直径

座屈しない限界長さ $l_k$ と直径 $d$ の関係

$$\ell_K^{\ 3} \propto d^2$$

胴体質量は全体の質量に比例→ $d \propto M_b^{\frac{3}{8}}$

# 筋肉の活動

身体が座屈しないように胴体の筋肉が活動（収縮）する仕事量を見積もる.

筋肉の仕事量 $W \propto \sigma A \Delta \ell$

単位時間当たり $P \propto \sigma A \dfrac{\Delta \ell}{\Delta t}$

σ: 筋肉の単位面積あたりの収縮力

*A*:筋肉の断面積

*Δl*: 収縮長さ

*Δt*: 収縮時間

筋肉の収縮力，収縮速度は一定と仮定

$$P \propto M_b^{\frac{3}{4}}$$

# まとめ:0.75乗則を導き出すために必要な仮定

・基礎代謝量に重力が関与している.
（身体の姿勢を維持するエネルギーに関係）
・動物の胴体は弾性体で近似できる.
（材料が一様な円柱とみなすことができる. ）
・胴体の折れ曲がりにくさにオイラーの座屈条件を適用可能である.
・座屈条件の荷重は生物体の質量に比例する.
・筋肉の動作特性はどの動物も同じ.

# 0.75乗則：もう一つの学説

G.B.West, J.H.Brown and B.J.Enquist,
Science, Vol.276, pp.122-126(1997)

毛細血管のフラクタル構造に注目して0.75乗則を
導出する.

# 基本的な考え方

１．ミクロレベルの血流に注目

動物の大小を問わず細胞組織のレベルでは同じ特性をもっているはずである．特に血液から細胞に供給される酸素や栄養の量は同じ性能になっていると予想される．

２．血流を供給する血管の構造

血管の構造は分岐しながら管径および長さが小さくなる．動物の大きさによって分岐回数に差があるにしても末端の毛細血管は同じスケール，特性になっていると予想される．

３．血管構造の規則性

血液が細胞に酸素や栄養を効率的に供給するには血管構造にそれなりの形の秩序があると予想される．この形の秩序を示す数学的表現としてフラクタルの考え方を利用する．

# 毛細血管の構造

http://highermeaning.org/Authors/Berridge/Chapter04.shtml

http://www.columbia.edu/itc/gsas/g6001/bhattacharya/PulCircSlides_files/slide0105.html

# 0.75を導出するために必要な仮定

１．血管の構造は自己相似性（フラクタル）をしている．

２．血管断面の総面積は各分岐レベルで同じである．

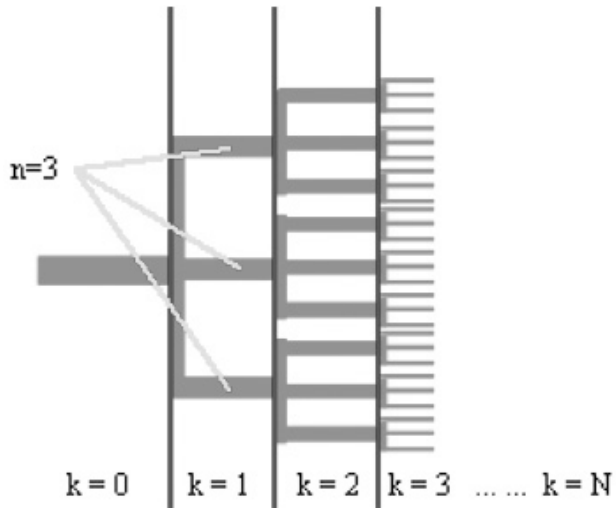
３．血管は三次元空間に充填的に張りめぐらされている．
（生体組織の活動を維持するため．）

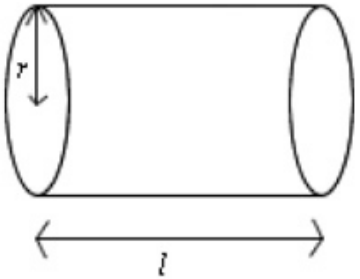
４．毛細血管は動物によらず同じスケール，特性になっている．

５．生物体の質量は体内の総血液量に比例する．

# 仮定1：血管はフラクタル構造

血管は自己相似性のフラクタル構造をしている．つまり各分岐レベルで同様な分岐数で分岐し，血管の径，長さは同じ比率で縮小する．




$$\beta = \frac{r_{k+1}}{r_k}$$

$$\gamma = \frac{l_{k+1}}{l_k}$$

$k=N$ 回目の分岐で毛細血管となる．

# 仮定２：血管断面の総面積は同じ

血管断面の総面積は各分岐レベルで同じ.
（血流の面積が一定になるように分岐.　）

$$N_k \pi r_k^2 = N_{k+1} \pi r_{k+1}^2$$

$$\boxed{\beta = \frac{r_{k+1}}{r_k} = n^{-1/2}}$$

$N_k$: 分岐 $k$ 回目の血管総数

$r_k$: $k$ 回目の血管半径

$n$: 分岐本数

# 仮定３　血管は三次元的に空間を充填

血管は生体組織の活性化を維持するために三次元空間に張りめぐらされ，細胞の活動を支援している.

生体組織への酸素，栄養供給能力は血管長さが支配的(∵$r<<l$).

三次元フラクタル構造より分岐 $k$ 回目での血管が受け持つ生体組織の体積は $k$ によらず大体等しいとすると

$$N_k l^3{}_k \approx N_{k+1} l^3{}_{k+1}$$

$$\frac{l^3{}_k}{l^3{}_{k+1}} \approx n$$

$$\boxed{\gamma = \frac{l_{k+1}}{l_k} \approx n^{-1/3}}$$

“The fractal geometry of nature”, by Mandelbrot より

## 仮定４：毛細血管のスケール，特性は同じ

毛細血管の直径，長さ，平均流速は動物によらず一定.
細胞レベルでは酸素や栄養を供給する性能（単位体積当たり）は同じと仮定.

## 仮定５：生物体の質量は総血液量に比例.

血液量が多いほど多くの生体組織を維持可能.　（活動可能な生体組織の体積は総血液量に比例する.）

$$V_b = 65.6 M_b^{1.02}$$

Blood volume: $V_b$, in ml,
Body mass: $M_b$, in kg
Reported by Stahl (1967)

# 0.75の導出（続き）

## 血液量の見積もり

$$V_b = \sum_{k=0}^{N} N_k V_k = \sum_{k=0}^{N} n^k \pi r_k^2 l_k$$

$$= \pi r_0^2 l_0 \sum_{k=0}^{N} (\beta^2 \gamma n)^k$$

$$= \pi r_N^2 l_N (\beta^2 \gamma)^{-N} \frac{1-(\beta^2 \gamma n)^{N+1}}{1-\beta^2 \gamma n}$$

$\beta^2 \gamma n < 1,\ N \approx 22 \sim 34$ → 分子の部分≒1，分母は定数.

$$\therefore V_b \propto \left(\beta^2 \gamma\right)^{-N} V_N \propto n^{\frac{4}{3}N} \propto M_b$$

（毛細血管内の体積 $V_N$ は定数）

# 0.75の導出（続き）

基礎代謝量$P$は，単位時間あたりの血液流量（総血液量ではない）に比例すると考えるのが妥当.

$$\dot{Q}_0 = N_k \dot{Q}_k = N_k \pi r_k^2 \overline{v}_k = N_N \pi r_N^2 \overline{v}_N \propto n^N$$

（毛細血管での流量は同じ）

$$\therefore P \propto \dot{Q}_0 \propto n^N$$

$\dot{Q}_k$ :分岐k回目での血管1本当たりの流量

$\overline{v}_k$ ：平均流速

$M_b \propto n^{\frac{4}{3}N}$ より

$$\boxed{P \propto M_b^{\frac{3}{4}}}$$

# 血管分岐の３乗則と矛盾しないか？

# 困った事実

細胞レベルでも0.75乗則が成立しているという報告がある.

# 第２回講義課題

魚の遊泳速度は体長の1/2乗に比例する統計データがある. スケーリングの理論で説明可能か？

魚の体形は弾性相似則に従うとする.

第２回講義おわり