バイオメカニズム特論　　伊能

第1回講義内容

1．スケーリング

動物の跳躍，走行速度について

飛行する鳥の体重限界

2．樹木の枝の2.5乗則

3．血管の3乗則

生物に学ぶことは役にたつか？

フクロウの鋸（のこぎり）歯状の羽毛

空力音を減少させる効果.

URL: http://www.japanfs.org/ja/pages/008928.html

図略

鋸（のこぎり）歯状の羽毛

図略

五〇〇系電車の屋根上の翼型パンタグラフ

本質的な物理現象に注目する必要がある.

生物に学ぶことは役にたつか？

URL: http://www.japanfs.org/ja/pages/008928.html

五〇〇系電車の翼型パンタグラフの騒音を低減する工夫にはフクロウの鋸（のこぎり）歯状の羽毛がヒントになっている.

小さな渦の発生が空力音を減少させる効果.

人工物に応用するには本質的な物理現象に注目する必要がある.

スケーリング（Scaling）

対象物の大きさによって，特性（移動速度，消費エネルギーなど）がどのように影響するかを探ること．対象物がどのように設計されているかという基本法則を知ることができる．

アロメトリー（allometry）：$y=ax^b$ で表される関係式

・動物の跳躍高さ，走行速度
・鳥の飛行と体重限界
・骨の長さと直径

ガリレオの描いた骨

骨のスケーリングを最初に指摘したのはガリレオガリレイと言われている.

「新科学対話」に掲載された図では，長い骨（基準の3倍）の直径が約9倍に描かれている．これは明らかに太すぎる．どのような比率で描けばよかったか？

動物の跳躍高さに関する記述

イノシシ：助走なしで1m跳躍．推定体重20kg
http://www.affrc.go.jp/seika/data_kinki/h13/kinki01045.html

ネズミ：跳躍1m,体重数百グラム
http://members.edogawa.home.ne.jp/benry/home/topikkusu/nezumi.htm

馬：オリンピック競技での障害の高さは160センチ以上，体重約450kg
http://www3.alpha-net.ne.jp/users/mushanga/ability.html

ヒョウ　2.5m　http://www.tobuzoo.com/cgi-bin/zoo/serch.php?id=26

カンガルー　2.5m　http://www.tobezoo.com/i/animal/a/akakangol.htm

ヒト　約1m（オリンピック級の選手で助走して2m）　体重約60kg

モルモット：25cm以下（跳躍は苦手），約1kg

カバ，ゾウ：跳躍しない．http://blindftp.exis.net/~spook/mongotx.html

跳躍高さ一定の理由

動物の跳躍高さが大きさに依存しない理由を示しなさい.

ヒント：跳躍高さ一定の理由

生物の質量M_bは代表長さLの３乗に比例.

筋力Fは脚の断面積Aに比例 → Lの２乗に比例.

これより筋力による加速度aの大きさは L に反比例.

（∵$F=M_b a$）

一方，跳躍時の加速距離sはLに比例.

→足が地面と離れる直前の速度Vを求めると…

動物の走行速度は体重に依存しないのはなぜ？
（走るのが苦手な動物はいる．）

野ウサギ：70km/h, 2〜3 kg

チーター：100km/h，約50kg

人：36km/h以下, 70kg

クマ：約60km/h, 400kg

ゾウ：約25km/h,数千kg

走行速度は生物体の質量に依存しないことを数理モデルで示せ．

ヒント：脚の回転エネルギーに着目する．

動物の走行速度は体重に依存しないのはなぜ？

脚の仕事（発生可能なエネルギー）: W

W=筋力 x 収縮長さ（力が作用する距離）$\propto L^{\square}$

（L:生物体の代表長さ）

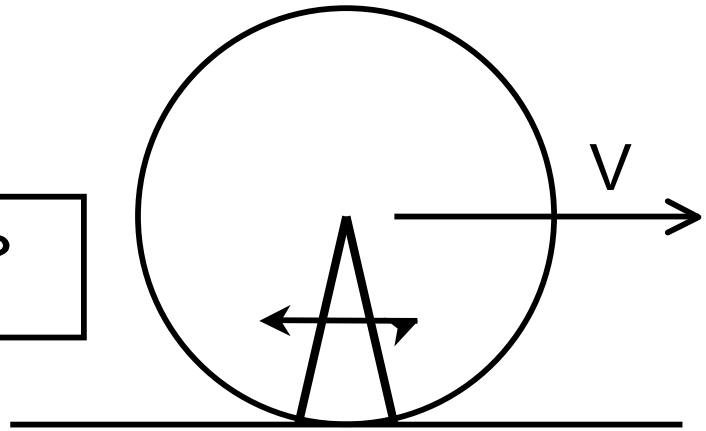
脚の往復運動で消費されるエネルギー :E

E∝慣性モーメント x $\omega^{\square} \propto L^{\square}$ x $(V/L)^{\square}=L^{\square}V^2$

W=EよりV（速度）は一定.

つまり重量に依存しない.

では走行速度に上限があるのはなぜ？



大きな鳥は飛ぶのが苦手なのはなぜ？

飛び上がるときに揚力を得る速度が必要．生物では速度に限界があるので，発生する揚力にも限度がある．

⇩

離陸時に必要な揚力に注目

白鳥の水面からの離陸

http://www.gochomuseum.net/blog/archives/000621.html

大きな鳥は飛ぶのが苦手なのはなぜ？

揚力=0.38SV^2 （S：翼面積，V：飛行速度）

飛行中は重量Wと釣り合っている.

例：Boeing 777-200： ($W=2.6\times10^6$N, $S=428m^2$)

必要な離陸速度　V= 126m/s (=455km/h)

生物では離陸するために速度Vを得る必要があるが，前述したように速度限界がある.

別解：飛翔に必要なパワー

飛翔中は揚力と体重が等しいので次の関係が成立.

$Mg(=W) \propto SV^2$ より $V \propto L^{0.5}$

飛翔するための揚力Fは以下のように見積もられる.

$F \propto SV^2 \propto L^3$

揚力を生み出すために必要なパワーP

$P=FV \propto L^{3.5}$

必要なパワーは3.5乗で増大（３乗以上になる）

→　生物では大きくなるほど飛ぶのが不利になる

（∵筋特性は生物の大小に関係ないので体重が揚力を上回る）

枝の周径と重さの関係（枝の2.5乗則）

枝の重量と
直径の関係

$$W \propto d^{2.5}$$

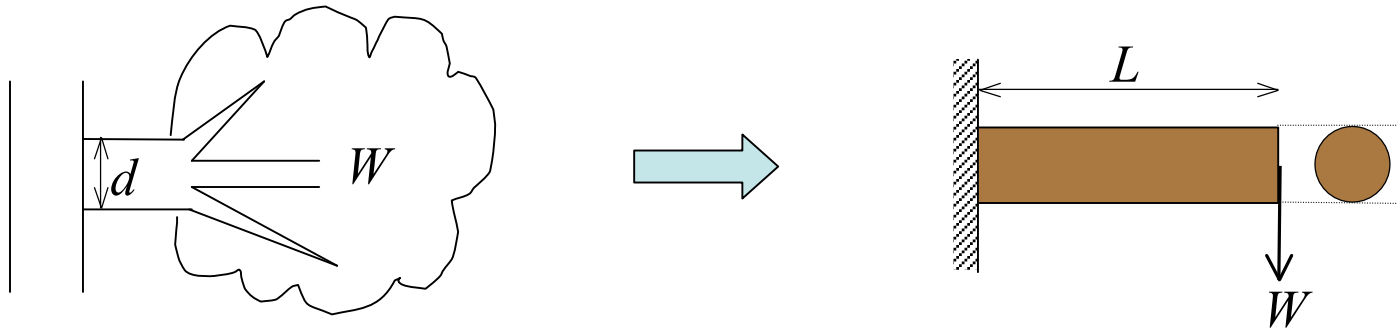
枝の力学モデル

$$\sigma = \frac{M}{Z} = \frac{WL}{Z} \qquad (1)$$

$$Z = \frac{\pi d^3}{32} \qquad (2)$$

$$W = \frac{\pi d^2}{4}\rho L \qquad (3)$$

$$W \propto d^{2.5}$$



樹木の枝の分岐則（2.5乗則）

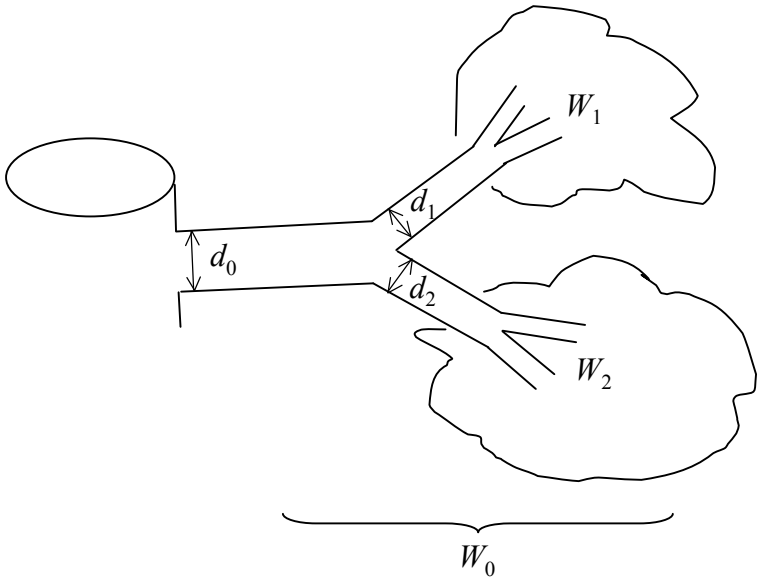
枝の重量と直径の関係

$$W \propto d^{2.5}$$

分岐した枝の関係

$$d_0^{2.5} = d_1^{2.5} + d_2^{2.5}$$

C.D.Murray(1927)



枝の2.5乗則についての疑問

導出モデルでは，枝は幹に対して直角方向に生えていると設定しているが，枝が幹に対して直角でない場合でも2.5乗則は成立するのだろうか？（成立するならどんな場合か？）

枝の角度の影響

$$\sigma = \frac{M}{Z} = \frac{WL}{Z}\cos\theta \qquad (1)$$

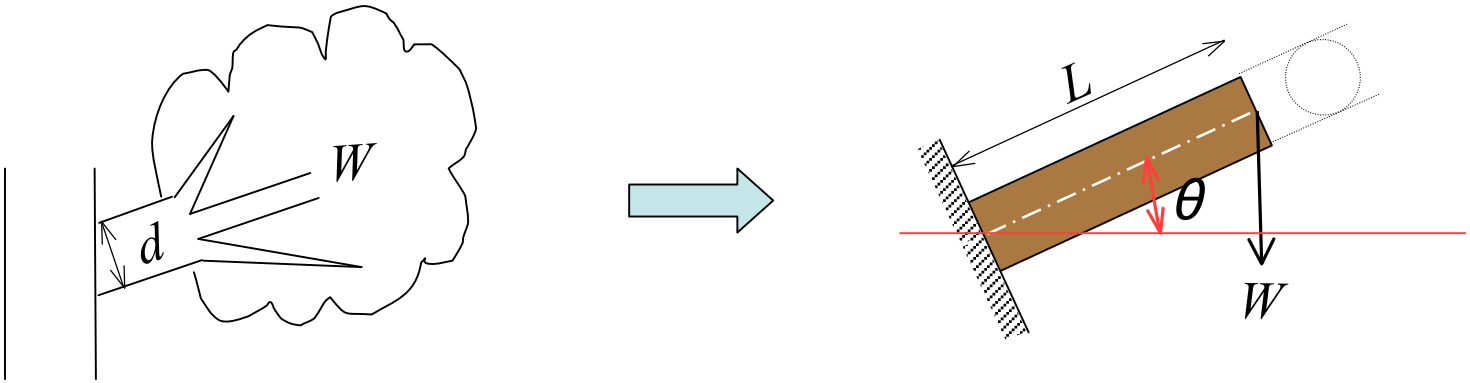
$$Z = \frac{\pi d^3}{32} \qquad (2)$$

$$W = \frac{\pi d^2}{4}\rho L \qquad (3)$$

指数には影響しない.

$$W \propto d^{2.5}$$

対数グラフなら誤差となって現れる.（同じ角度の枝を選んだ方がよい.）



血管分岐の法則（３乗則）

$$r_0^n = r_1^n + r_2^n \qquad n = 2.8 \sim 3.2$$

C.D.Murray(1927)

指数が２と３でどんな違いが出るのか.
n=2ならば分岐後も同じ流速になる.
では，n=3の場合には分岐後の流速はどうなる？

答：分岐後の半径は２乗よりも大きい→流速は遅くなる

血管分岐の法則（３乗則）の導出

$$r_0^n = r_1^n + r_2^n \qquad n = 2.8 \sim 3.2$$

C.D.Murray(1927)

血液供給は諸器官の活動を維持するのに必須.
→多すぎると無駄，少なすぎると支障
→したがって生命維持には適度な血液流量が必要
→何らかの法則性が成立していると予想.

Murray の最小仕事モデル

基本的な考え方（一本の血管について考える）

・血管半径が小さすぎると

→粘性抵抗が増大→機械的エネルギーが増大.（not good）

→管内血液が減少→化学的エネルギーが減少.（good）

・血管半径が大きすぎると

→粘性抵抗が減少→機械的エネルギーが減少.（good）

→管内血液が増大→化学的エネルギーが増大.（not good）

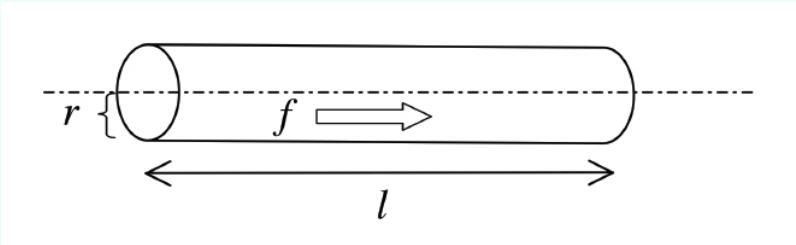
※化学的エネルギー：血管内の血液を活性化させておくのに必要なエネルギー. 管内血液量に比例（小さい方がよい）.

機械的エネルギーE_mと化学的エネルギーE_cの総和の最小化

Murray の最小仕事モデル（続き）

$$F = E_m + E_c = \Delta p f + kV \quad (k\text{は定数})$$

$$f = \frac{\Delta p}{l}\frac{\pi r^4}{8\mu} \quad \text{より}$$



$$F = \frac{8\mu f^2 l}{\pi r^4} + k\pi r^2 l$$

仮定：血管内はポアズイユ流れ
（両端の圧力差をΔpとする．）

Fの最小値を求めるためにFをrで偏微分すると
以下の関係式が得られる．

$$\boxed{} = \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{k}{\mu}} = const.$$

←この計算をしてみよう.

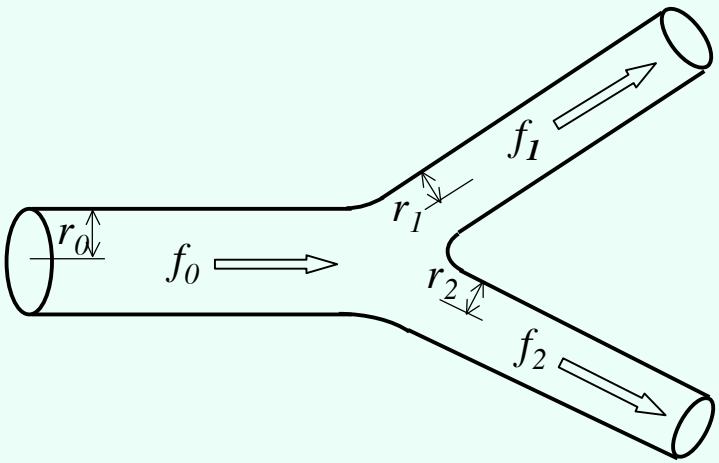
Murray の最小仕事モデル（続き）

入口側，出口側の流量を f_0, f_1, f_2 とすると

$$\frac{f_0}{r_0^3} = \frac{f_1}{r_1^3} = \frac{f_2}{r_2^3}$$

$f_0 = f_1 + f_2$ より

$$r_0^3 = r_1^3 + r_2^3$$



続きは次回へ

課題1：ボートのスケーリング

ボート競技には漕ぎ手の人数が1, 2, 4, 8名の種目がある．ボートの国際記録を両対数グラフにプロットしてみると，漕ぎ手の人数と速度には比例関係（アロメトリー式に従う）があることが伺える．この傾き（指数）は説明可能か．

第１回講義おわり