予習ポイント

- 運動方程式を導出できるようにする．慣性力，減衰力，復元力が図 1.1 のどちら向きに，どれだけ作用しているか正しく理解すること．
- 運動方程式を，D'Alembert のつり合いと Newton の第二法則から求める方法の二通り．
- 運動方程式の解を導出せよ．
- 減衰定数の値によって，運動方程式の解がどのような特徴を示すのか説明できるようにする．
- 固有周期および減衰定数の求め方を説明できるようにすること．
- Bernoulli-Euler 梁について振動の基礎方程式を導出できるようにすること．
- 微分方程式の一般解を導出すること．

前試問の課題

問題１　図１に示した１質点１自由度系に作用する慣性力，粘性抵抗力（減衰力）およびばねによる復元力を示しなさい．ただし，力の向きと大きさを正しく示すこと．また，慣性力と減衰力と復元力のつり合いから，１質点１自由度系の運動方程式（式 1.1）を示しなさい.

問題２　Newton の第２法則（Laws of motion）を使って，上で求めた１質点１自由度系の運動方程式（式 1.1）を導出しなさい.

問題３　微分方程式（式 1.2）の解が式（1.5）の通りとなることを示しなさい.

問題４　減衰定数 h の値が $h^2-1>0$ の場合，時刻 $t=0$ における初期変位を x_0，初速度を $\dot{x}_0$ とすると，運動方程式（式 1.1）の解が式（1.7）の通りとなることを示しなさい.

問題５　式(1.7)で与えられる変位が時間によってどのように変化するのかを，グラフを使って説明しなさい.（グラフを正確に書くこと）

問題６　減衰定数 h の値が $h^2-1=0$ の場合，運動方程式（式 1.1）の解が式（1.9）の通りとなることを示しなさい.

問題７　式（1.9）で示される運動方程式（式 1.1）の変位が時間によってどのように変化するのかを，グラフを使って説明しなさい.（グラフを正確に書くこと）

問題８　減衰定数 h の値が $h^2-1<0$ の場合，時刻 $t=0$ における初期変位を x_0，初速度を $\dot{x}_0$ とすると，運動方程式（式 1.1）の解が式（1.12）および式（1.13）の通りとなることを示しなさい.

問題９　式（1.12）で示される運動方程式（式 1.1）の変位が時間によってどのように変化するのかを，グラフを使って説明しなさい.（グラフを正確に書くこと）

問題 10　固有周期および減衰定数とは何か，どのように求めるのか説明しなさい.

問題 11　梁に作用する力のつり合いから，式（2.1）に示す梁の振動の基礎方程式を導出しなさい.
ヒント：巻末の資料を参照

問題 12　式（2.1）に示した梁の振動の基礎方程式の一般解が式(2.5)で与えられることを示せ.
ヒント：巻末の資料を参照

問題 13　片持ち梁の境界条件（固定端でたわみと回転角が 0，自由端で曲げモーメント M とせん断力 S が 0）より，式（2.8）に示される $\lambda\left(\lambda^4=\omega^2/v^2\right)$ に示した条件式を求めなさい．また，1 次および 2 次の固有円振動数を求めなさい.

問題 14　図 2.2 に示すように自由端に集中質量 m をもつ片持ち梁を考えると，その境界条件より式（2.15）に示した $\lambda\left(\lambda^4=\omega^2/v^2\right)$ に関する条件式を導出しなさい．また，1 次および 2 次の固有円振動数を求めなさい.

問題 15　一様な断面を有する片持ち梁の固有円振動数ωを, 自由端に集中荷重Pが作用した場合の片持ち梁の静的たわみX を用いて Rayleigh-Ritz 法を用いて求めよ.

問題 16　一様な断面を有する片持ち梁の固有円振動数ωを, 等分布荷重pが作用した場合の片持ち梁の静的たわみX を用いて Rayleigh-Ritz 法を用いて求めよ.

問題 17　一様な断面を有し, 自由端に集中質量mをもつ片持ち梁の固有円振動数ωを, 自由端に集中荷重Pが作用した場合の片持ち梁の静的たわみX を用いて Rayleigh-Ritz 法を用いて求めよ.

問題 18　一様な断面を有し, 自由端に集中質量mをもつ片持ち梁の固有円振動数ωを, 等分布荷重pが作用した場合の片持ち梁の静的たわみX を用いて Rayleigh-Ritz 法を用いて求めよ.

問題 19　地面の変位, 速度および加速度がy, $\dot{y}$ および$\ddot{y}$であるとき, 図 5.2 に示した 1 質点減衰系の運動方程式が式（5.1）となることを示しなさい.

問題 20　地面が調和振動$y = ae^{i\omega t}$をする場合の微分方程式(5.6)の一般解が次式となることを示しなさい.　なお, ここでh<1 とする.

$$x = x_c + x_p = C_1 e^{\left(-h\overline{\omega}+\overline{\omega}\sqrt{h^2-1}\right)t} + C_2 e^{\left(-h\overline{\omega}-\overline{\omega}\sqrt{h^2-1}\right)t} + \frac{\omega^2 a}{\overline{\omega}^2 - \omega^2 + 2ih\overline{\omega}\omega} e^{i\omega t}$$

ここで, $\overline{\omega}$ は系の非減衰固有円振動数, h は減衰定数である.

問題 21　系が減衰振動をする場合には, 一般解のうち, $\overline{x} = C_1 e^{\left(-h\overline{\omega}+\overline{\omega}\sqrt{h^2-1}\right)t} + C_2 e^{\left(-h\overline{\omega}-\overline{\omega}\sqrt{h^2-1}\right)t}$ の項が減衰してゼロになることを利用して, 定常状態に於ける最大振幅$\hat{X}$ を求めなさい.

$$x \cong x_p = \frac{\omega^2 a}{\sqrt{\left(\overline{\omega}^2 - \omega^2\right)^2 + \left(2h\overline{\omega}\omega\right)^2}} e^{i(\omega t - \phi)} = \hat{X} e^{i(\omega t - \phi)}$$

ヒント：　$\hat{X} = |x| = |x_p|$

問題 22　定常状態における変位振幅$\hat{X}$ と静的変位$m\left(\omega^2 a\right)/k$ の比で表される動的応答倍率μを求めなさい.

$$\hat{X} = \frac{\omega^2 a}{\overline{\omega}^2} \frac{1}{\sqrt{\left(1-(\omega/\overline{\omega})^2\right)^2 + \left(2h(\omega/\overline{\omega})\right)^2}} = \frac{m\left(\omega^2 a\right)}{k} \frac{1}{\sqrt{\left(1-(\omega/\overline{\omega})^2\right)^2 + \left(2h(\omega/\overline{\omega})\right)^2}}$$

問題 23　定常状態における質点の絶対変位ξを求め, これを微分することにより絶対加速度$\ddot{\xi}$を求めなさい.

問題 24　質点の絶対加速度$\ddot{\xi}$と地動加速度$\ddot{y}$の振幅の比を求め, h=0.05 の場合と h=0.10 の場合の共振曲線を書きなさい.
ヒント：$\omega/\overline{\omega}$を横軸に, 質点の絶対加速度$\ddot{\xi}$と地動加速度$\ddot{y}$の振幅の比を縦軸にとったグラフを共振曲線と呼ぶ（図 5.3 参照）. なお, 振幅比は h の値によらず$\omega/\overline{\omega}$ =1 で最大となり, $\omega/\overline{\omega}$ =0, $\sqrt{2}$ で 1 をとる.

問題 11 のヒント

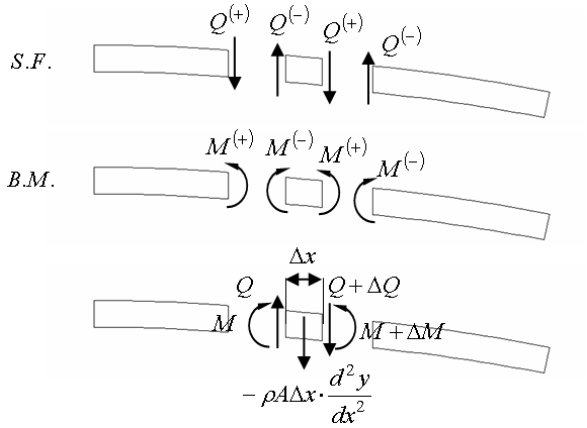

図-1　梁の微小要素に生じるたわみと力のつりあい

一様な密度ρを持つ断面積A，断面 2 次モーメントI，弾性係数Eの梁において，**図**-1 に微小要素に作用する力の釣り合いを考えると以下のようになる．

$$-Q+\left(-\rho A\Delta x\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)+Q+\Delta Q=0 \tag{1}$$

ここで，Qはせん断力，ΔQはせん断力の微小要素内での増分である．第 2 項は微小要素の質量$\rho A\Delta x$に加速度$\partial^2 y/\partial t^2$を乗じていることからもわかるとおり，慣性力（Inertial Force）である．なお，**図-1** に示したとおり，慣性力は下向きを正としている．

式(1)を整理すると次式の通りである．

$$\Delta Q=\rho A\Delta x\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{2}$$

一方，たわみに関する方程式から，せん断力の増分ΔQは以下のようにあらわされることから，

$$\Delta Q=\frac{\partial}{\partial x}\left(-EI\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right)=-EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}\Delta x \tag{3}$$

したがって，式(2)，式(3)より，次式の通りとなる．

$$\rho A\Delta x\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}\Delta x=0$$

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}+\frac{1}{\nu^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=0 \tag{4}$$

$$\nu^2=\frac{EI}{\rho A} \tag{5}$$

ここで，ν^2は材料の物性によってのみ決まる値である．

問題 12 のヒント

式(4)で得られた偏微分方程式を解く場合には，変数分離法を用いて解くのが一般的である．これは偏微分方程式の解 $y = f(x,t)$ を，位置を表す変数 x と時間を表す変数 t の効果を $X(x)$ および $T(t)$ と独立に定義して，それらの積として次式のように表す方法である．

$$y = X(x) \cdot T(t) \tag{6}$$

なお，このような変数分離法が用いることができる問題はモード（振動モード）と固有値（角円振動数）が存在するような，固有値問題の場合である．

式(6)を式(4)の偏微分方程式に代入すると，以下の通りとなる．

$$\frac{\partial^4 X(x)}{\partial x^4} \cdot T(t) + \frac{1}{\nu^2} X(x) \cdot \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\dfrac{\partial^4 X(x)}{\partial x^4}}{X(x)} = -\frac{1}{\nu^2} \frac{\dfrac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2}}{T(t)}$$

上式において任意の独立変数 x , t に対して常に成り立つには上式が一定値 λ となる必要がある．λ が正値であるか否かは，問題であるが，ここでは振動現象を取り扱おうとしていることから，λ を正定値として取り扱うこととする．このとき，式(4)の偏微分方程式は以下に示す 2 組の常微分方程式に帰着する．

$$\frac{\dfrac{\partial^4 X(x)}{\partial x^4}}{X(x)} = -\frac{1}{\nu^2} \frac{\dfrac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2}}{T(t)} = \lambda > 0 \tag{7}$$

$$\frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} = -\frac{\lambda}{\nu^2} \cdot T(t) \tag{8}$$

$$\frac{\partial^4 X(x)}{\partial x^4} = \lambda \cdot X(x) \tag{9}$$

式(8)の 2 階の常微分方程式の解として時間項 $T(t)$ を次式の通り仮定される．

$$T(t) = C \cdot \exp^{i\left(\nu\sqrt{\lambda} \cdot t + \varphi\right)} \tag{10}$$

ここで，$\nu\sqrt{\lambda}$ は角円振動数であり，C は時間項の振幅，φ は位相であるが，振幅は 1，位相は 0 単純化して考えることにする．したがって，式(10)は以下の通りとなる．

$$T(t) = \exp^{i\nu\sqrt{\lambda} \cdot t} \tag{10a}$$

また，式(8)の 4 階の常微分方程式の解として空間項 $X(x)$ は次式の通り仮定される．

$$X(x) = C \cdot \exp^{\kappa \cdot x}$$

これを式(9)に代入すると，次式の通りとなり

$$\left(\kappa^4-\lambda\right)\cdot C\cdot \exp^{\kappa\cdot x}=0$$

$$\left(\kappa^2-\sqrt{\lambda}\right)\cdot\left(\kappa^2+\sqrt{\lambda}\right)=0$$

$$\kappa=\pm\sqrt[4]{\lambda},\pm\sqrt[4]{\lambda}i$$

$$\begin{aligned}
X(x)&=G_1\cdot\exp\left(i\cdot\sqrt[4]{\lambda}x\right)+G_2\cdot\exp\left(-i\cdot\sqrt[4]{\lambda}x\right)+G_3\cdot\exp\left(\sqrt[4]{\lambda}x\right)+G_4\cdot\exp\left(-\sqrt[4]{\lambda}x\right)\\
&=\left(G_{1R}+iG_{1I}\right)\cdot(\cos\sqrt[4]{\lambda}x+i\cdot\sin\sqrt[4]{\lambda}x)+\left(G_{2R}+iG_{2I}\right)\cdot(\cos\sqrt[4]{\lambda}x-i\cdot\sin\sqrt[4]{\lambda}x)\\
&\qquad+\left(G_3+G_4\right)\cdot\frac{\exp\left(\sqrt[4]{\lambda}x\right)+\exp\left(-\sqrt[4]{\lambda}x\right)}{2}\\
&\qquad\qquad+\left(G_3-G_4\right)\cdot\frac{\exp\left(\sqrt[4]{\lambda}x\right)-\exp\left(-\sqrt[4]{\lambda}x\right)}{2}\\
&=\left(G_{1R}+G_{2R}\right)\cdot\cos\sqrt[4]{\lambda}x+\left(-G_{1I}+G_{2I}\right)\cdot\sin\sqrt[4]{\lambda}x\\
&\qquad+i\left(G_{1I}+G_{2I}\right)\cdot\cos\sqrt[4]{\lambda}x-i\left(G_{1R}+G_{2R}\right)\cdot\sin\sqrt[4]{\lambda}x\\
&\qquad\qquad+\left(G_3+G_4\right)\cdot\cosh\sqrt[4]{\lambda}x+\left(G_3-G_4\right)\cdot\sinh\sqrt[4]{\lambda}x
\end{aligned}$$

$$X(x)=C_1\cdot\cos\sqrt[4]{\lambda}x+C_2\cdot\sin\sqrt[4]{\lambda}x+C_3\cdot\cosh\sqrt[4]{\lambda}x+C_4\cdot\sinh\sqrt[4]{\lambda}x \tag{11}$$

したがって，式(4)の一般解は次式の通りとなる．

$$y=\left(C_1\cdot\cos\sqrt[4]{\lambda}x+C_2\cdot\sin\sqrt[4]{\lambda}x+C_3\cdot\cosh\sqrt[4]{\lambda}x+C_4\cdot\sinh\sqrt[4]{\lambda}x\right)\cdot\exp^{i\nu\sqrt{\lambda}\cdot t} \tag{12}$$