予習ポイント

- オイラー座屈の理論を説明できるようにする．
- 柱部材の任意の点における断面力のつり合いから，微分方程式を導出できるようにする．
- このとき，断面力の正負の向きを自分の言葉で説明できるようにする．
- 微分方程式の一般解を導出する．
- 境界条件を考慮して，座屈荷重および座屈モードを導出する．
- 座屈モードがどのような形状となるか，ホワイトボードに図示できるようにする．（図は下手でもかまわないが特徴が分かるようでなければいけない）

前試問，後試問で不合格と指摘された場合，再度試問を行うので指定された期日までに勉強し直して，再試問に望むこと．

前試問の課題

問題1　軸力を受ける柱に作用する力を図に示し（図1），そのつり合いから，

$$Q - qdx - (Q + dQ) = 0$$

$$M + Qdx + Pdy - \frac{qdx}{2}dx - (M + dM) = 0$$

の2式を導きなさい．なお，このとき，軸力P，せん断力Qおよび曲げモーメントMの向きが，なぜ図1の通りとなるのかを説明しなさい（断面力の正の向きを説明しなさい）．また，A 点まわりの曲げモーメントのつり合い式を示しなさい．

問題2　問題1で求めた力のつり合い方程式から，式(2)および式(3)を導きなさい．

問題3　式(4)の右辺は何を表しているか説明しなさい．また，曲げモーメントとたわみの関係の近似式(4)にマイナスの符号がつくのは何故か説明しなさい．

問題4　式(2)，式(3)および式(4)から式(5)および式(6)を導き，式(6)の一般解が式(8)となることを示しなさい．

問題5　式(8)に示した一般解を元に，両端をピン支持された場合の座屈荷重および座屈モード形を求めなさい．

問題6　両端をピン支持した場合の，1次の座屈荷重および座屈モード形を示しなさい．また，そのとき，柱に作用するせん断力Qの分布を示しなさい．

問題7　一端を固定し，もう一つの端部を自由端とした場合の座屈荷重および座屈モード形を示しなさい．また1次の場合の座屈モード形を正しく図示しなさい．

問題8　一端を固定し，もう一つの端部をピン支持した場合の座屈荷重を求めなさい．このとき，座屈方程式$\tan kl = kl$の最小の解の$kl = 4.493$であることを，図を使って説明しなさい．

問題9　一端を固定し，もう一つの端部をピン支持した場合の1次の座屈モード形を示しなさい．

問題10　両端を固定した場合の，1次の座屈荷重および座屈モード形を示しなさい．また，このとき，両端をピン支持した場合の座屈荷重に比べてどちらがどの程度大きいのか説明しなさい．

問題11　両端をピン支持した場合について，任意の点に作用する曲げモーメントが$M_x = Py$となることを示し，式(7)に示した，座屈の支配方程式（4階の常微分方程式）が曲率d^2y/dx^2とたわみyと軸力Pに関する，2階の常微分方程式となることを説明しなさい．

問題12　一端を固定し，もう一つの端部を自由端とした場合，自由端Bのたわみをy_Bと置くと，任意の点xに作用する曲げモーメントが，$M_x = -P(y_B - y)$となることを示しなさい．

問題13　一端を固定し，もう一つの端部を自由端とした場合，点xに作用する曲げモーメントが

$M_x = -P(y_B - y)$ であることを用いて，座屈方程式が $\cos kl = 0$ および座屈荷重が $P_{cr} = EI/4\ell^2$ となることを示しなさい．

問題 14　一端を固定し，もう一つの端部をピン支持して軸力 P を作用させた場合，任意の点 x に作用する曲げモーメントが，$M_x = Py - V(l - x)$ となることを示しなさい．なお，V はピン支持された端部に作用する水平力とする．

問題 15　また，そのとき座屈方程式が $\tan kl = kl$ また座屈荷重がとなることを示しなさい．$P_{cr} = 20.19EI/\ell^2$

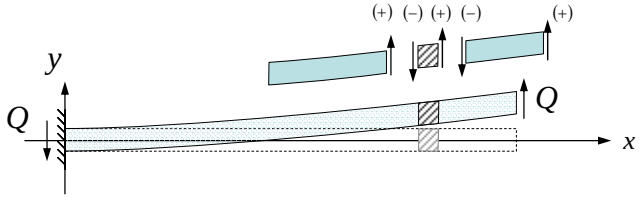
問題 16　両端を固定して軸力 P を作用させた場合，任意の点 x に作用する曲げモーメントが，$M_x = Py + M_0$ となることを示しなさい．なお，M_0 は両端に作用する曲げモーメントである．

問題 17　両端を固定して軸力 P を作用させた場合，任意の点 x に作用する曲げモーメントが，$M_x = Py + M_0$ となることを用いて，座屈荷重が $P_{cr} = 4\pi^2 EI/\ell^2$ となることを示しなさい．

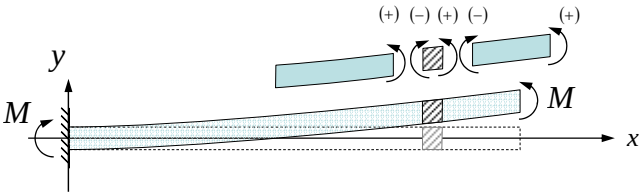
問題 18　境界条件に応じて変化する座屈荷重を $P_{cr} = \pi^2 EI/\ell_{eff}{}^2$ で表すとき，この ℓ_{eff} のことを有効座屈長と呼ぶが，両端ピン支持，一端固定他端ピン支持，一端固定他端自由支持，両端固定支持で有効座屈長 ℓ_{eff} をそれぞれ求めなさい．

ヒント

問題1　せん断力および曲げモーメントの正負の向きは断面の向きによって変わる．ただし，断面力の作用によって正の変形が生じる場合の断面力が正となる．



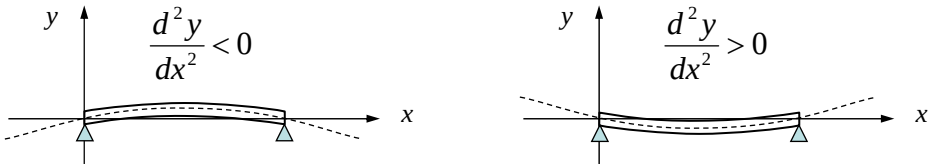
(a) せん断力の正の向き



(b) 曲げモーメントの正の向き

図　断面力の作用と向き

問題3　たわみ角 dy/dx を微分した d^2y/dx^2 は，はりのたわみの接線剛性の傾きの変化を表している．dy/dx が正から負に転じるときは d^2y/dx^2 は負，dy/dx が負から正に転じるときは d^2y/dx^2 は正となる．



(a) $d^2y/dx^2 < 0$　　(b) $d^2y/dx^2 > 0$

図　Curvature の正負

問題 12　ヒントを出すまでもない．

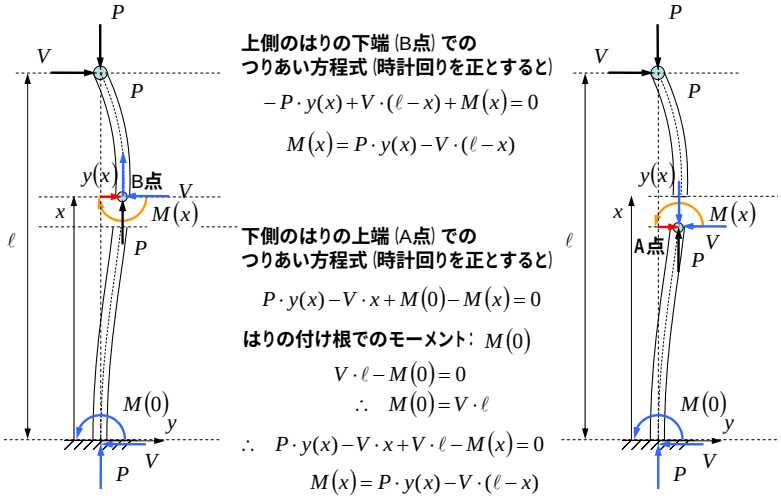
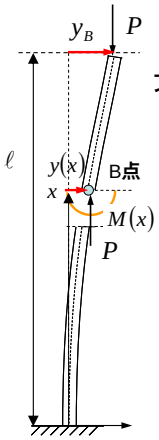


図 モーメントのつり合い

問題 13　ヒントを出すまでもない．



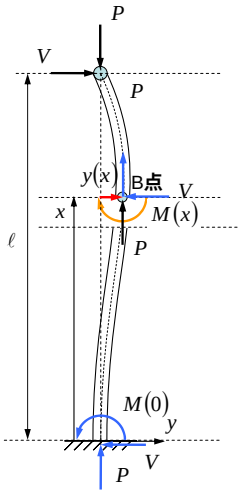
上側のはりの下端（B点）での
つりあい方程式（時計回りを正とすると）

$$P\cdot(y_B - y(x)) + M(x) = 0$$

$$M(x) = -P\cdot(y_B - y(x))$$

図　モーメントのつりあい

問題 15　ヒントを出すまでもない．



上側のはりの下端（B点）での
つりあい方程式（時計回りを正とすると）

$$-P\cdot y(x) + V\cdot(\ell - x) + M(x) = 0$$

$$M(x) = P\cdot y(x) - V\cdot(\ell - x)$$

下側のはりの上端（A点）での
つりあい方程式（時計回りを正とすると）

$$P\cdot y(x) - V\cdot x + M(0) - M(x) = 0$$

はりの付け根でのモーメント：$M(0)$

$$V\cdot\ell - M(0) = 0$$

$$\therefore\quad M(0) = V\cdot\ell$$

$$\therefore\quad P\cdot y(x) - V\cdot x + V\cdot\ell - M(x) = 0$$

$$M(x) = P\cdot y(x) - V\cdot(\ell - x)$$

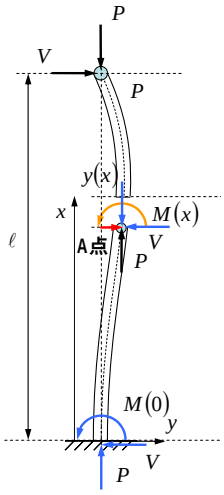
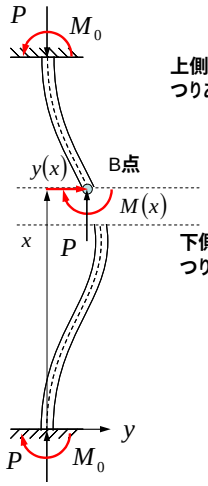


図　つり合い

問題 17



上側のはりの下端（B点）での
つりあい方程式（時計回りを正とすると）

$$-P\cdot y(x) - M_0 + M(x) = 0$$

$$M(x) = P\cdot y(x) + M_0$$

下側のはりの上端（A点）での
つりあい方程式（時計回りを正とすると）

$$P\cdot y(x) + M_0 - M(x) = 0$$

$$M(x) = P\cdot y(x) + M_0$$

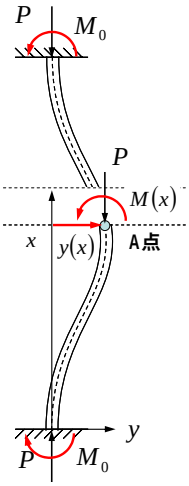
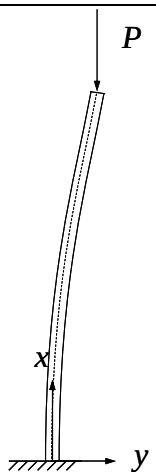
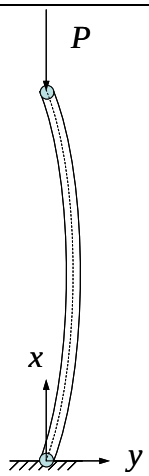
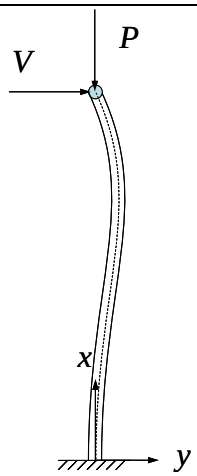
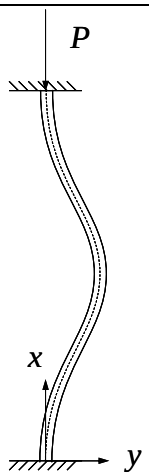
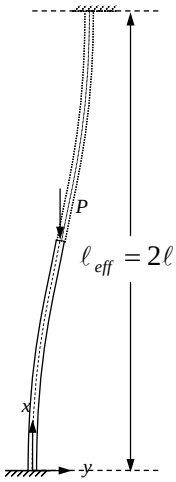
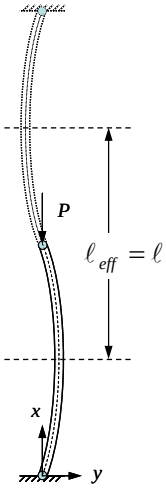
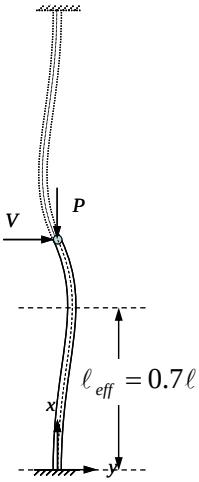
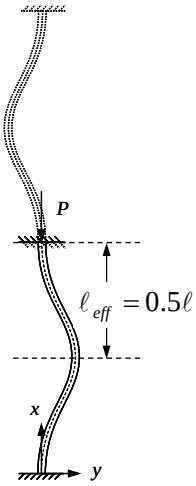


図　モーメントのつり合い

問題 19

境界条件	**一端固定他端自由**	**両端ピン支持**	**一端固定他端ピン**	**両端固定**
座屈モード				
座屈荷重 P_{cr}	$P_{cr} = \dfrac{\pi^2 EI}{(2\ell)^2}$	$P_{cr} = \dfrac{\pi^2 EI}{\ell^2}$	$P_{cr} \cong \dfrac{\pi^2 EI}{(0.699)^2 \ell^2}$	$P_{cr} = \dfrac{\pi^2 EI}{(\ell/2)^2}$
有効座屈長 ℓ_{eff}				
	$\ell_{eff} = 2\ell$	$\ell_{eff} = \ell$	$\ell_{eff} \cong 0.7\ell$	$\ell_{eff} = 0.5\ell$