構造実験 B1 座屈

座屈に関する理論的背景

平成 19年 後期

<u>目次</u>

1.オイラー座屈	2
2. 軸力を受ける柱のつり合い方程式	2
2.1 軸力が作用する柱のたわみに関する微分方程式の導出とその一般解	2
2.2 様々な支持条件下での座屈荷重と座屈モード形	4
(1) 両端がピン支持の場合	4
(2) 一端固定, 他端自由の場合	6
(3) 一端固定, 他端ピン支持の場合	6
(4) 両端固定の場合	7
3. 2階常微分方程式を用いた柱のオイラー座屈荷重の導出	9
3.1 両端がピン支持の場合	9
3.2 一端固定, 他端自由の場合	10
3.3 一端固定,他端ピン支持の場合	11

柱の座屈に関するオイラーの理論式

1. オイラー座屈

軸方向の圧縮力を受ける棒を柱といい、断面の寸法に比較して長さが長い柱を特に長柱と 呼ぶ.長柱が軸圧縮力を受けると、圧縮による破壊が生じる前に側方にたわみが生じ、急速 に耐荷力を失う座屈という現象が起きる.座屈が生じるときの荷重を座屈荷重、座屈荷重を 柱の断面積で割った値を座屈応力という.座屈応力が降伏応力を越えない範囲の座屈問題は、 オイラー(L. Euler(1707-1783))によって初めて取り扱われたため、オイラー座屈と呼ばれ る.

2. 軸力を受ける柱のつり合い方程式



2.1 軸力が作用する柱のたわみに関する微分方程式の導出とその一般解

図1 圧縮力を受ける柱

図1に示すように、軸力*P*を受ける柱の変形を考えてみよう.柱のたわみが小さい範囲では、次の近似が成立する.

$$\frac{dy}{dx} = \tan\theta \cong \sin\theta \cong \theta , \quad \cos\theta \cong 1 , \quad ds \cong dx \tag{1}$$

図1より、上下方向の力および点Bまわりの曲げモーメントのつり合いを考えると、

$$Q - qdx - (Q + dQ) = 0$$

 $M + Qdx + Pdy - \frac{qdx}{2}dx - (M + dM) = 0$

したがって,

$$\frac{dQ}{dx} = -q \tag{2}$$

$$Q = \frac{dM}{dx} - P\frac{dy}{dx}$$

$$= -EI\frac{d^{3}y}{dx^{3}} - P\frac{dy}{dx}$$
(3)

式(2)はせん断力の変化率が分布荷重に等しいことを表しており、軸力 P が作用していない普通のはりの場合と同じであるが、式(3)は、軸力 P が作用する場合には、曲げモーメントの変化率の他に軸力 P もせん断力に寄与することを示している。軸力 P がゼロの場合には、式(3)は通常のせん断力と曲げモーメントの関係となる。また、柱のたわみが微小であれば、曲げモーメントたわみの間には次式が成り立つ。

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M}{EI} \tag{4}$$

式(4)には、軸力Pは影響しない.式(2)に式(3)、(4)を代入すると、

$$\frac{d^4y}{dx^4} + k^2 \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{q}{EI}$$
(5)

ここで,

$$k^2 = \frac{P}{EI} \tag{6}$$

なお, 分布荷重q=0の場合には,

$$\frac{d^4y}{dx^4} + k^2 \frac{d^2y}{dx^2} = 0$$
(7)

式(7)の一般解は、以下の通りとなる.

$$y = A\cos kx + B\sin kx + Cx + D \tag{8}$$

ちなみに、4次までの微分形を示すと以下の通りとなる.

$$y' = -Ak \sin kx + Bk \cos kx + C$$

$$y'' = -Ak^{2} \cos kx - Bk^{2} \sin kx$$

$$y''' = Ak^{3} \sin kx - Bk^{3} \cos kx$$
(9)

なお,係数*A*,*B*,*C*,*D*および*k*は境界条件を与えることで求められる.式(7)の一般解 は,はりに軸力*P*が作用している状態でのたわみであり,はりが座屈した場合のたわみ形(座 屈モード形)を意味している.また,式(6)において*k*とはりの曲げ剛性*EI*から求められる軸 カPは座屈する際の荷重(座屈荷重)となる.次章では、様々な境界条件に対して座屈荷重 と座屈モードを求める.

2.2 様々な支持条件下での座屈荷重と座屈モード形

(1) 両端がピン支持の場合

図1に示したように両端をピンで支持されたはりを考えると、境界条件は、x=0とx=lにおいて以下の通りとなる.

$$y = 0$$
, $\frac{d^2 y}{dx^2} = 0$ (at $x = 0, x = l$) (a)

これを式(8)、(9)に代入すると、

$$A + D = 0, \quad k^{2}A = 0$$

$$A\cos kl + B\sin kl + Cl + D = 0$$

$$k^{2}A\cos kl + k^{2}B\sin kl = 0$$
(b)

A, B, C, D が全て0 ではない解を得るためには, A = C = D = 0, $B \neq 0$ で,

$$\sin kl = 0 \tag{c}$$

が成立しなければならない.式(c)を座屈方程式(buckling equation)とよび,次式の通りkに関して複数の解が存在する.

$$k = \frac{n\pi}{l}$$
 (*n* = 1,2,3,....) (d)

このとき、座屈荷重 P_{cr} 、たわみ ϕ は、B=bと置くと、

$$P_{cr} = \frac{n^2 \pi^2 EI}{l^2}$$
(10)

$$\phi = b \sin \frac{n\pi x}{l} \tag{11}$$

となり、次数nに応じて何通りもの座屈荷重 P_{cr} とたわみ ϕ が得られる.これは、式(7)で表さ れる、オイラー座屈に関する微分方程式には複数の解が存在することを示している.しかし、 座屈後のたわみが ϕ_i となる座屈荷重 $P_{cr,i}$ はただ一組である.このように、微分方程式の解(こ の場合、たわみ形 ϕ)と特性値(この場合、座屈荷重 P_{cr} を決定するk)に特定の組み合わせ があるような問題のことを固有値問題と呼び、座屈問題、振動問題や量子力学など様々な物 理現象に登場する.微分方程式の一般解は、互いに独立な固有関数 ϕ_i の線形和として表わさ れ、 ϕ のことを一般にモード(座屈解析では座屈モード,振動解析では振動モード)と呼ぶ.

ちなみに、座屈や振動に関する微分方程式を直接解くことができない場合には、離散化し て代数方程式(マトリクス方程式)として解くことがよくあるが、この場合でも解は固有べ

構造力学実験 座屈

クトル ϕ の線形和で表すことができ、モードは固有ベクトルとして、座屈荷重や固有振動数 は固有値 λ を使って求めることができる.

図2は、1次~4次の座屈モード ϕ を示したものである.式(10)によれば、座屈荷重 P_{cr} は 1次モードの時に $\pi^2 EI/l^2$ と最も小さく、2次、3次と高次モードになるほど、座屈荷重は $4\pi^2 EI/l^2$ 、 $9\pi^2 EI/l^2$ と大きくなる.このため、2次モードの座屈を起こすためには、1次 モードの座屈が起こらないように、座屈モードを拘束しなければならない、一般に、高次の 座屈モードを再現するためには特別な拘束が必要となり、座屈荷重も大きくなる.したがっ て、小さな荷重で座屈する、n=1となる場合の座屈荷重が P_{cr} 最も重要となる.

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \tag{12}$$

$$\phi = b \sin \frac{\pi x}{l} \tag{13}$$

なお,座屈は,式(12)による座屈荷重 P_{cr} に達すると突然起こるものであり、この荷重以下では柱にはたわみは全く生じない.

なお、式(3)からせん断力を求めると、

$$Q = -EI \frac{d^3 y}{dx^3} - P \frac{dy}{dx}$$

= $EIk^3 B \cos kx - PkB \cos kx$ (e)
= $k \cos kx (EIk^2 - P) \cos kx$
= 0

これは、軸力Pを作用させている間、柱にはせん断力は作用しないことを示している.上下 方向に完全にまっすぐな状態で軸力を作用させるため、支点において水平力が作用しないた めである.



(2) 一端固定,他端自由の場合

境界条件は,

$$x = 0$$
 °C, $y = 0$, $y' = 0$
 $x = l$ °C, $y'' = 0$, $Q = 0$ (a)

これを式(8), (9), (3)に代入すると,

$$A + D = 0, \quad Bk + C = 0$$

$$Ak^{2} \cos kl + Bk^{2} \sin kl = 0 \qquad (b)$$

$$- Elk^{3} (A \sin kl - B \cos kl) - Pk(-A \sin kl + B \cos kl + C) = 0$$

これより, B = C = 0であり, $D = -A \neq 0$ の解を得るためには, 次の座屈方程式を満足しなければならない.

$$\cos kl = 0 \tag{c}$$

したがって,

$$kl = \frac{(2n-1)\pi}{2}$$
 (n = 1,2,3,....) (d)

したがって,座屈荷重は, n=1として,

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2} \tag{14}$$

座屈モード ϕ は, A = -D = -a と置いて,

$$\phi = a(1 - \cos\frac{\pi x}{2l}) \tag{15}$$

(3) 一端固定,他端ピン支持の場合

境界条件は,

$$x = 0$$
 °C, $y = 0$, $y' = 0$
 $x = l$ °C, $y = 0$, $y'' = 0$ (a)

これを式(8)、(9)に代入すると、

$$A + D = 0, \quad Bk + C = 0$$

$$A \cos kl + B \sin kl + Cl + D = 0$$

$$Ak^{2} \cos kl + Bk^{2} \sin kl = 0$$
(b)

これより, D = -A, C = -Bkを代入して, C, Dを消去すると,

$$A(1 - \cos kl) + B(kl - \sin kl) = 0$$

(c)
$$A\cos kl + B\sin kl = 0$$

A, Bともにゼロでない解を得るためには,

$$\begin{vmatrix} 1 - \cos kl & kl - \sin kl \\ \cos kl & \sin kl \end{vmatrix} = 0$$
 (d)

したがって,

$$\sin kl - kl \cos kl = 0 \tag{e}$$

となり、座屈方程式は、次式の通りとなる.

$$\tan kl = kl \tag{f}$$

これを満足する最小のはは

$$kl = 4.493$$
 (g)

したがって,座屈荷重は,

$$P_{cr} = \frac{20.19EI}{l^2}$$
(16)

式(e)を式(b)の3番目の式に代入すると、A+Bkl=0であるから、D=-A、B=-A/(kl)、 C=-Bk=A/lとなる.これより、座屈モード ϕ は、A=aと置いて、

$$\phi = a \left\{ \cos \frac{4.493x}{l} - \frac{\sin(4.493x/l)}{4.493} + \frac{x}{l} - 1 \right\}$$
(17)

(4) 両端固定の場合

境界条件は,

これを式(8)、(9)に代入すると、

$$A + D = 0, \quad Bk + C = 0$$

$$A \cos kl + B \sin kl + Cl + D = 0$$

$$- Ak \sin kl + Bk \cos kl + C = 0$$
(b)

これより、D = -A, C = -Bkを代入して、C, Dを消去すると、

構造力学実験 座屈

$$A(1 - \cos kl) + B(kl - \sin kl) = 0$$

$$A\sin kl + B(1 - \cos kl) = 0$$
(c)

A, Bともにゼロでない解を得るためには,

$$\begin{vmatrix} 1 - \cos kl & kl - \sin kl \\ \sin kl & 1 - \cos kl \end{vmatrix} = 0$$
(d)

したがって,

$$2 - 2\cos kl - kl\sin kl = 0 \tag{e}$$

これを整理すると,

$$\sin\frac{kl}{2}\left(\sin\frac{kl}{2} - \frac{kl}{2}\cos\frac{kl}{2}\right) = 0 \tag{f}$$

となり, 座屈方程式は,

$$\sin\frac{kl}{2} = 0$$
 (g)

もしくは,

$$\tan\frac{kl}{2} = \frac{kl}{2} \tag{h}$$

式(g)を満足するklは,

$$\frac{kl}{2} = n\pi$$
 (*n* = 1,2,3,....) (i)

一方,式(h)を満足する最小のkl/2は,

$$\frac{kl}{2} = 4.493$$
 (j)

これは式(g)(n=1)よりも大きいため、式(g)(n=1)が座屈荷重を与える. したがって、座屈荷重 は、

$$P_{cr} = \frac{4\pi^2 EI}{l^2} \tag{18}$$

座屈モード ϕ は、B=C=0、D=-A=aと置いて、

構造力学実験 座屈

$$\phi = a(1 - \cos\frac{2\pi x}{l})$$
$$= 2a\sin^2\frac{\pi x}{l}$$

(19)

3. 2階常微分方程式を用いた柱のオイラー座屈荷重の導出

以上は、式(5)による4階の常微分方程式を用いた解であるが、軸力によって柱に生じる曲 げモーメントの分布が容易に求められる場合には、式(4)による2階の常微分方程式を解くこ とによっても座屈荷重を求めることができる.

3.1 両端がピン支持の場合

図3に示すように、軸力が作用すると、任意の点xに作用する曲げモーメントは、

$$M_x = Py \tag{a}$$

これを式(4)に代入すると,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M_x}{EI} = -\frac{Py}{EI}$$
(b)

これを整理して,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + k^2y = 0 \tag{c}$$

$$y = A\cos kx + B\sin kx \tag{d}$$

境界条件は,

$$x = 0, \quad x = l \quad \textcircled{\circ} \quad y = 0 \tag{e}$$

であるから、これを式(d)に代入すると、座屈方程式は、

$$\sin kl = 0 \tag{f}$$

と,4階の常微分方程式の場合と同じ結果が得られる.

式(e)では柱の両端でM = 0の条件を使っていないが,式(11)で与えられる座屈モードはx = 0, x = lでM = 0の条件を満足する.また,柱にはせん断力が生じないことは前述したとおりである.



3.2 一端固定,他端自由の場合

図4に示すように、軸力が作用すると、自由端Bのたわみを y_B と置くと、任意の点xに作用する曲げモーメントは、

$$M_x = -P(y_B - y) \tag{a}$$

これを式(4)に代入すると,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{P}{EI}(y_B - y) \tag{b}$$

これを整理して,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + k^2y = k^2y_B \tag{c}$$

式(c)の一般解は,

$$y = A\cos kx + B\sin kx + y_B \tag{d}$$

境界条件は,

$$x = 0 \ \ \forall y = 0, \ y' = 0$$
 (e)

であるから、これを式(d)に代入すると、 $A = y_B$ 、B = 0となり、式(d)よりたわみは、

$$y = y_B (1 - \cos kx) \tag{f}$$

自由端B(x=l)のたわみが y_B であるから、式(f)にx=lを代入すると

$$y_B = y_B (1 - \cos kl) \tag{g}$$

したがって、 $y_B \neq 0$ の解を持つためには、座屈方程式として次式が成立する必要がある.

$$\cos kl = 0 \tag{h}$$

これは前述の4階の常微分方程式の場合と同じ結果である.

3.3 一端固定,他端ピン支持の場合

図5に示すように、軸力が作用すると、ピン支持点には水平反力Vが生じる.したがって、 任意の点xに作用する曲げモーメントは、

$$M_x = Py - V(l - x) \tag{a}$$

これを式(4)に代入すると,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{1}{EI} \{ Py - V(l-x) \}$$
 (b)

これを整理して,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + k^2y = k^2\frac{V}{P}(l-x)$$
 (c)

式(c)の一般解は,

$$y = A\cos kx + B\sin kx + \frac{V}{P}(l-x)$$
(d)

境界条件は,

$$x = 0 \ \ \forall y = 0, \ y' = 0, \ x = l \ \ \forall y = 0$$
 (e)



であるから,これを式(d)に代入すると,

$$A + \frac{Vl}{P} = 0$$
, $kB - \frac{V}{P} = 0$, $A\cos kl + B\sin kl = 0$ (f)

これより座屈方程式は,

$$\tan kl = kl \tag{g}$$

これは前述の4階の常微分方程式の場合と同じ結果である.

