生体工学第一　　2007.4.25

第２回講義内容

１．前回講義の訂正

２．出席点の問題

３．前回ホームワーク（英文和訳）の解説

４．0.75乗則：熱放散による説明（前回の復習）

５．0.75乗則：二つの学説

　5.1　弾性相似則モデル

　5.2　フラクタルモデル（次回に講義）

６．ホームワーク（釘のスケーリング）

前回講義の訂正

枝の重量と周径の関係について

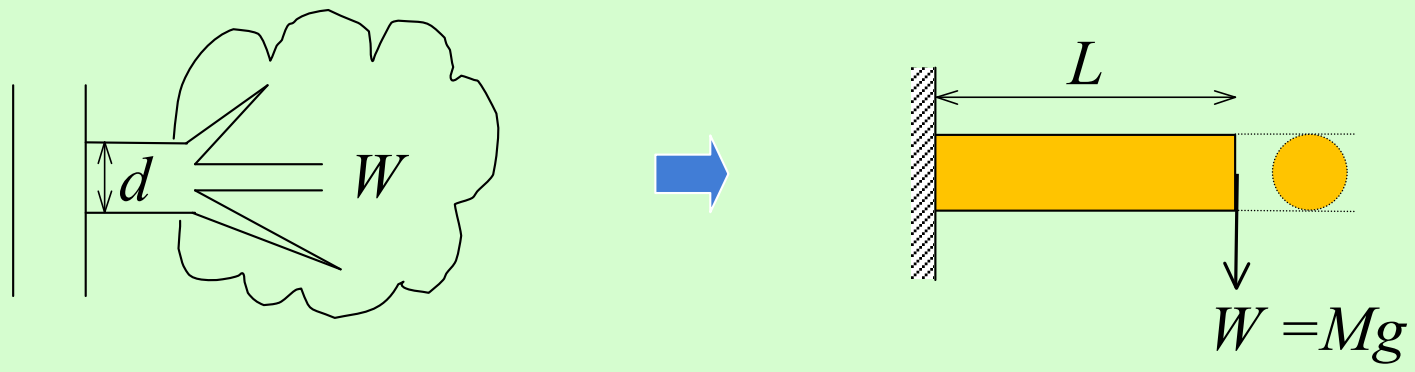
$$\sigma = \frac{M}{Z} = \frac{WL}{Z}$$

$$Z = \frac{\pi d^3}{32}$$

ρ ：枝を直はりとしてモデル化したときの平均質量密度 [kg/m^3]

$$W = \frac{\pi d^2}{4} L\rho g \quad \Rightarrow \quad W \propto d^2 L$$

$$M = \frac{\pi d^2}{4} L\rho$$



出席点１　跳躍高さ一定の理由

動物の跳躍高さが大きさに依存しない理由を示しなさい.

イノシシ：助走なしで1m跳躍．体重約20kg
http://www.affrc.go.jp/seika/data_kinki/h13/kinki01045.html

ネズミ：跳躍1m,体重数百グラム
http://members.edogawa.home.ne.jp/benry/home/topikkusu/nezumi.htm

馬：オリンピック競技での障害の高さは160センチ以上，体重約450kg
http://www3.alpha-net.ne.jp/users/mushanga/ability.html

ヒョウ　2.5m　http://www.tobuzoo.com/cgi-bin/zoo/serch.php?id=26

カンガルー　2.5m　http://www.tobezoo.com/i/animal/a/akakangol.htm

ヒト　約1m（オリンピック級の選手で助走して2m）　体重約60kg

モルモット：25cm以下（跳躍は苦手），約1kg

カバ，ゾウ：跳躍しない．http://blindftp.exis.net/~spook/mongotx.html

出席点２
動物の走行速度は体重に依存しないのはなぜ？
（もちろん走るのが苦手な動物もいる．）

野ウサギ：70km/h, 2〜3 kg

チーター：100km/h，約50kg

人：36km/h以下, 70kg

クマ：約60km/h, 400kg

ゾウ：約25km/h,数千kg

動物の代謝率

生物の質量M_bと安静時の単位時間当たりの代謝エネルギーPとの間には，両対数軸上できれいな線形関係が成立している.

From *Scaling*, K.S.Nielsen

人の代謝エネルギー

「第6次改訂日本人の栄養所要量について」厚生労働省

18〜29才男性では1日1550[kcal]なので，約18 [cal/sec]となる．つまり75W程度になっている．
（この数値は第1回講義に示した0.75乗則の線にほぼ一致している．）
また年齢とともに代謝エネルギーは減少する．

基礎代謝率と生物の質量の関係

$$P \propto M_b^{0.75}$$

0.75乗則

単位質量あたりでは

$$P_u \propto M_b^{-0.25}$$

熱放散の考え方では指数はいくつになるか.

まず，生物の形を球体（半径r）と仮定して指数を求める.

考え方：

生物の質量M_bはr^3に比例

身体から出る熱量は表面積Sに比例.（Sはr^2に比例）

単位時間当たりの熱量が基礎代謝率Pに比例.

PとM_bの関係から指数は．．．

生物の形を円柱と仮定したら0.75になるのでは？

結論：体表面積が最小となる条件下でも0.75乗則は説明できない.

指数0.75の導出

McMahon （1973年）の学説

基本的な考えかた：

地上（重力下）で動物が体躯の形状を維持するには筋肉を活動させる必要があり，これが基礎代謝量に関係していると考える．（胴体が大きければ，筋肉の断面積も増えるが質量も増加する．胴体を弾性体と仮定すると，動物の胴体の長さと質量の間には，折れ曲がりにくさに関して相似的な関係があると予想される．）

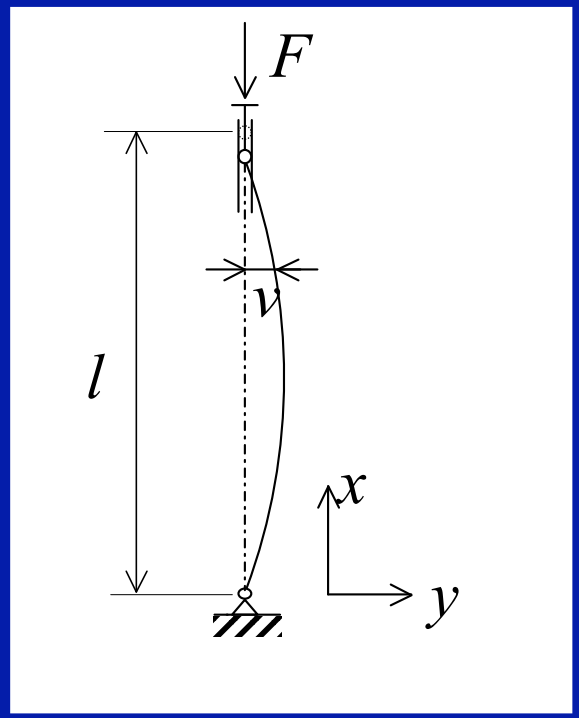
弾性相似則を適用

身体の折れ曲がりにくさを数式で表現

↓

弾性はりの座屈条件を利用

$$F = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$



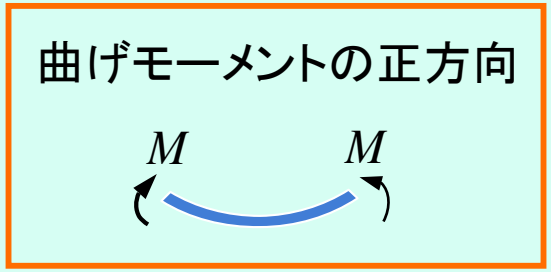
E: ヤング率

I: 断面二次モーメント

（体躯を円柱と仮定 $I \propto d^4$ ）

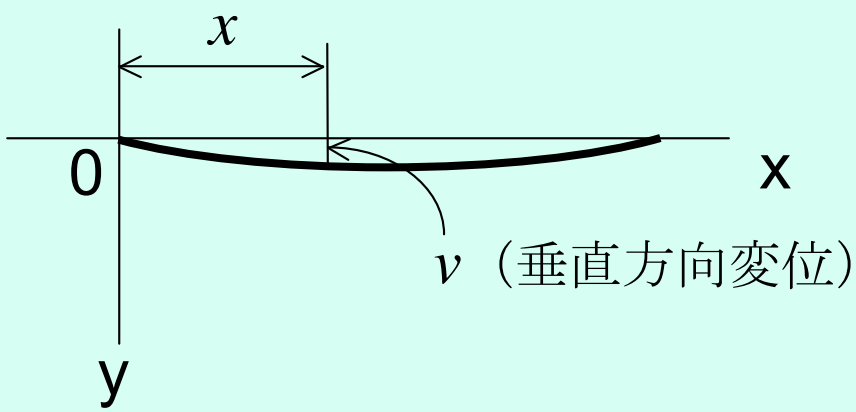
座屈条件の導出

はりのたわみの方程式



$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$

EI: 曲げ剛性



なぜ $\dfrac{d^2v}{dx^2}=\dfrac{M}{EI}$ となるのか？

軸線から y 離れた箇所でのひずみは $\dfrac{y}{r}=\varepsilon$

応力は $\sigma = E\varepsilon = \dfrac{y}{r}E$

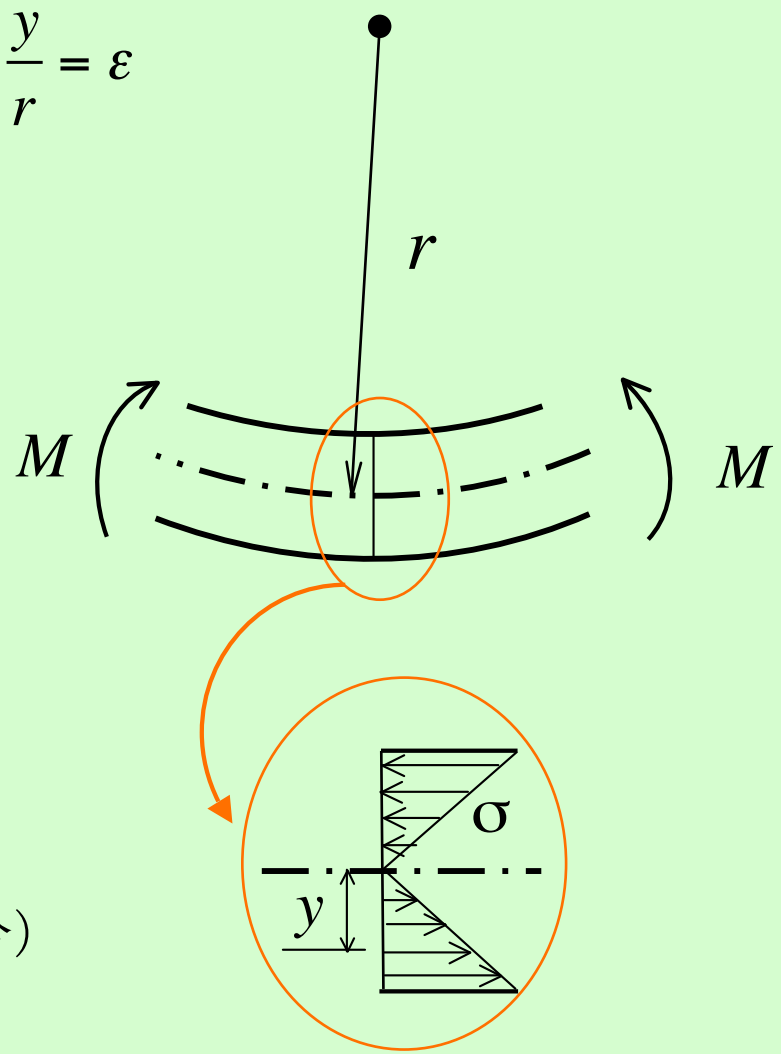
したがってモーメント M は

$$M=\int_A \sigma y dA = \frac{E}{r}\int_A y^2 dA = \frac{EI}{r}$$

一方，曲率半径の式は

$$\frac{1}{r}=\frac{\dfrac{d^2v}{dx^2}}{\left\{1+\left(\dfrac{dv}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}\approx\frac{d^2v}{dx^2}$$

（変形が小さい場合）

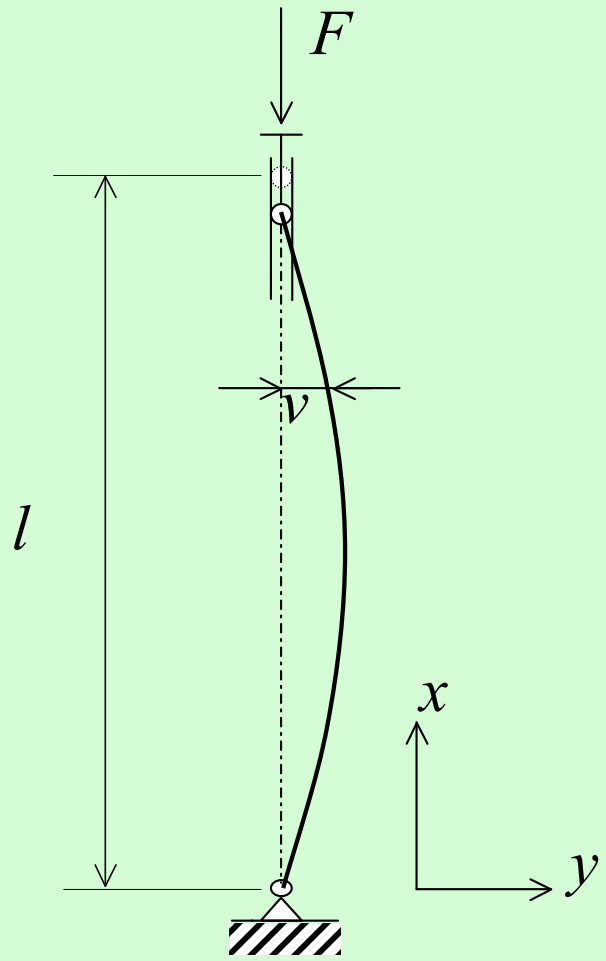


座屈条件の導出（続）

はりを縦方向にして考える

内力と外力とのつりあいの条件式を考えると，次式のようになる．

$$EI\frac{d^2v}{dx^2}+Fv=0$$



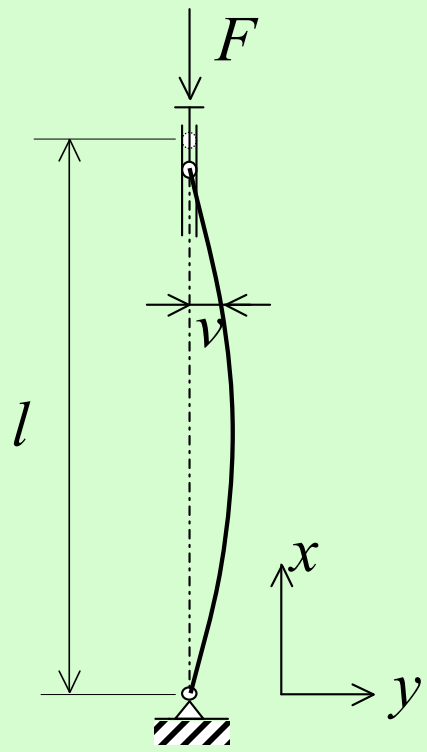
座屈条件の導出（続）

$$EI\frac{d^2v}{dx^2}+Fv=0$$

微分方程式の解

$$v=C_1\cos\alpha x+C_2\sin\alpha x$$

ここで　$\alpha=\sqrt{\dfrac{F}{EI}}$



境界条件

$x=0$ で $v=0$ → $C_1=0$

$x=l$ で $v=0$ → $C_2\sin\alpha l=0$.

２番目の境界条件で $C_2=0$ は意味がない.

→ $\alpha l=m\pi$（mは整数）が成立する必要がある.

$$\boxed{F=m^2\frac{\pi^2EI}{l^2}}$$

$m=1$ のときオイラーの座屈条件という.

弾性相似則（続き）

F は胴体の重量に比例すると仮定

$$F \propto \pi d^2 l \rho g$$

ρ: 見かけ上の密度

g: 重力加速度

d :胴体の直径

座屈しない限界長さ l_k と直径 d の関係

$$l_K^{\ 3} \propto d^2$$

胴体質量は全体の質量に比例→ $d \propto M_b^{\frac{3}{8}}$

筋肉の活動

身体が座屈しないように胴体の筋肉が活動（収縮）する仕事量を見積もる.

筋肉の仕事量 $W \propto \sigma A \Delta l$

単位時間当たり $P \propto \sigma A \dfrac{\Delta l}{\Delta t}$

σ: 筋肉の単位面積あたりの収縮力

A:筋肉の断面積

Δl : 収縮長さ

Δt : 収縮時間

筋肉の収縮力，収縮速度は一定と仮定

$$P \propto M_b^{\frac{3}{4}}$$

0.75乗則を導き出すために必要な仮定

・基礎代謝率に重力が関与している.
（身体の姿勢を維持するエネルギーに関係）
・動物の胴体は弾性体で近似できる.
（材料が一様な円柱とみなすことができる. ）
・胴体の折れ曲がりにくさにオイラーの座屈条件を適用可能である.
・座屈条件の荷重は生物体の質量に比例する.
・筋肉の動作特性はどの動物も同じ.

0.75乗則：もう一つの学説

G.B.West, J.H.Brown and B.J.Enquist,
Science, Vol.276, pp.122-126(1997)

次回の講義で紹介