3.2 インダクタ

インダクタの蓄積エネルギー: $U = \frac{1}{2}LI^2$

ソレノイドコイルの自己インダクタンスを代入すると $U = \frac{1}{2}\frac{\mu\pi r^2 N^2}{\ell}I^2$ である。仮想変位の方法より

$$F = \left(\frac{\partial U}{\partial \ell}\right) = \frac{\mu\pi r^2}{2}(NI)^2\frac{\partial}{\partial \ell}\left(\frac{1}{\ell}\right)$$

ソレノイドは内部にのみ磁界があるので

$H = \frac{NI}{\ell}$, $I = \frac{\ell H}{N} = \frac{\ell B}{\mu N}$, より $NI = \frac{\ell B}{\mu}$

$$-F = \frac{\mu\pi r^2}{2}(NI)^2\frac{1}{\ell^2} = \pi r^2\frac{\mu}{2\ell^2}\frac{\ell^2 B^2}{\mu^2} = \pi r^2\frac{B^2}{2\mu}$$

コイル断面積でわれば，単位面積当たりの力は

$-F = \frac{B^2}{2\mu_0}$ [N/m^2]

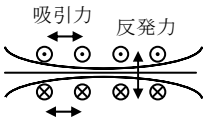
半径方向の力も同様に

$F = \left(\frac{\partial U}{\partial r}\right) = \frac{2\mu\pi r}{2\ell}(NI)^2$ より，

$$F = \frac{2\mu\pi r}{2\ell}\left(\frac{\ell B}{\mu}\right)^2 = 2\pi r\ell\frac{B^2}{2\mu}$$

コイルの内面積で割れば，$F = \frac{B^2}{2\mu_0}$

コイルの長さ方向では巻線間に吸引力，半径方向には反発力が働く。コイルは内径方向に拡がろうとする。



なお単位体積あたりのエネルギーは

$$u = \frac{1}{2}\frac{\mu\pi r^2}{\ell}(NI)^2\frac{1}{\pi r^2\ell} = \frac{\mu}{2\ell^2}\left(\frac{\ell B}{\mu}\right)^2 = \frac{B^2}{2\mu}$$

[J/m^3=Nm/m^3]

実際のコイルのインダクタンス

単線円形コイル

$$L = 10^{-7}\times 4\pi R\left(\ln\frac{R}{r} - 2 + \delta\right)$$

$r/R < 0.2$，直流では $\delta = 0.25$

単層円筒形コイル（長岡係数）

$$L = 10^{-7}\times\lambda\frac{(2\pi rN)^2}{\ell}$$

r :円筒半径，ℓ :コイル長さ，N :巻数

λ :長岡係数

パルスパワー使用時のコイルが受ける変化

- コイル温度

  $T \propto J^2\times\tau$（電流密度×パルス幅）
- 電磁力:コイルの半径方向に働く力

  $F \propto (NI)^2$（起磁力の 2 乗）

  巻線の引っ張り応力 $F_T \propto F \propto (NI)^2$

例えばソレノイドコイルでは蓄積エネルギーは

$U = \frac{1}{2}\frac{\mu\pi r^2}{\ell}(NI)^2$ なので，限界値はコイル巻線の引っ張り応力限界，つまりコイルの破壊強度で決定される。値は概ね $u \simeq 10^7$ J/m^3

7.2 数値計算法

微分方程式の数値解法（初期値問題）

解析的に解けない場合も，関数 $y' = f(x, y)$，（初期条件：$y(x_0) = y_0$）で与えられる関数値を数値的に求めることができる。

4 次のルンゲクッタ法

$$y_{n+1} = y_n + (k_1/6 + k_2/3 + k_3/3 + k_4/6)$$
$$k_1 = h\,f(x_n, y_n)$$
$$k_2 = h\,f(x_n + h/2, y_n + k_1/2)$$
$$k_3 = h\,f(x_n + h/2, y_n + k_2/2)$$
$$k_4 = h\,f(x_n + h, y_n + k_3)$$

$y' = y$ （ $f(x, y) = y$ と y のみの関数である。解析的に解くと $y = \mathrm{e}^x$ ） を初期条件 $y(0) = y_0 = 1$，刻み幅 $h = \Delta x = 0.1$ で解く。

$$k_1 = h \times y_0 = 0.1 \times 1 = 0.1$$
$$k_2 = 0.1 \times (1 + 0.1/2) = 0.105$$
$$k_3 = 0.1 \times (1 + 0.105/2) = 0.10525$$
$$k_4 = 0.1 \times (1 + 0.10525/2) = 0.110525$$

$y_1 = y_0 + (k_1 + 2 \times k_2 + 2 \times k_3 + k_4)/6$ より

$$y_1 = 1 + (0.1 + 2 \times 0.105 + 2 \times 0.10525 + 0.110525)/6$$
$$= 1.105171$$

この値は，$y = \mathrm{e}^{0.1} = 1.10517$ に等しい。

次のステップは

$$k_1 = 0.1 \times 1.105171 = 0.1105171$$
$$k_2 = 0.1 \times (1.105171 + 0.110517/2) = 0.116043$$
$$k_3 = 0.1 \times (1.105171 + 0.116043/2) = 0.116319$$
$$k_4 = 0.1 \times (1.105171 + 0.116319) = 0.122149$$

$$y_2 = y(0.2) = y_1 + (0.110517 + 2 \times 0.116043$$
$$+ 2 \times 0.116319 + 0.122149)/6$$
$$= 1.221403$$

この値は，$y = \mathrm{e}^{0.2} = 1.2214$ に等しい。

2階の微分方程式の場合は連立1階微分方程式に直す。

$y'' + y = 0$ を初期条件 $y(0) = 0,\ y'(0) = 1$ ，刻み幅 $h = \Delta x = 0.1$ で解く。

$u \equiv y,\ v \equiv y'$ とおけば $u' = y'$ だから

$$u' = v \quad u(0) = 0$$
$$v' = -u \quad v(0) = 1$$

変数 u, v に対応する k_i を k_{iu}, k_{iv} とする。

$$k_{1u} = 0.1 \times u'(0) = 0.1 \times v(0) = 0.1 \times 1 = 0.1$$
$$k_{1v} = 0.1 \times v'(0) = 0.1 \times \{-u(0)\} = 0$$
$$k_{2u} = 0.1 \times \{v(0) + k_{1v}/2\} = 0.1$$
$$k_{2v} = 0.1 \times \{-u(0) - k_{1u}/2\} = 0.1 \times (0 - 0.05) = -0.005$$
$$k_{3u} = 0.1 \times \{v(0) + k_{2v}/2\} = 0.1 \times (1 - 0.0025) = 0.09975$$
$$k_{3v} = 0.1 \times \{-u(0) - k_{2u}/2\} = 0.1 \times (0 - 0.05) = -0.005$$
$$k_{4u} = 0.1 \times \{v(0) + k_{3v}\} = 0.1 \times (1 - 0.005) = 0.0995$$
$$k_{4v} = 0.1 \times \{-u(0) - k_{3u}\} = 0.1 \times (0 - 0.099755) = -0.009975$$
$$u(0.1) = 0 + (0.1 + 2 \times 0.1 + 2 \times 0.009975 + 0.0995)/6 = 0.099833$$
$$v(0.1) = 1 + (0.1 - 2 \times 0.005 - 2 \times 0.005 - 0.009975)/6 = 0.995004$$

解析解は $u = \sin x,\ v = \cos x$。0.1 を代入すると一致する。

以上の過程をプログラムし，繰り返し計算すれば目的の値を求めることができる。

なお Scilab*ではこの計算過程を

```
y=ode(y0, t0, t, f)
```

とするだけで済む。

* http://www.scilab.org/

回路方程式の立て方

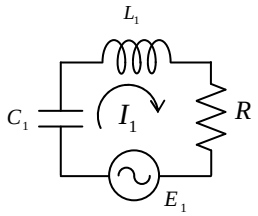
右図で電源を含めた微分方程式は

$E_1 - \frac{q_1}{C_1} - L_1 \frac{dI_1}{dt} - RI_1 = 0$ となる。電荷と電流を

$y_1 = q_1$，$y_2 = I_1$ とおけば，$\frac{dy_1}{dt} = \frac{dq_1}{dt} = I_1 = y_2$

元の方程式から

$$\frac{dI_1}{dt} = \frac{1}{L_1}\left(E_1 - \frac{q_1}{C_1} - -RI_1\right) = -\frac{Ry_2}{L_1} - \frac{y_1}{L_1C_1} + \frac{E_1}{L_1}$$



よって，以下の行列式となる，

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} q_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 \\ -\frac{Ry_2}{L_1} - \frac{y_1}{L_1C_1} + \frac{E_1}{L_1} \end{bmatrix}$$

なお，電荷を使わずに電圧と電流で書くと

$E_1 - \frac{1}{C_1}\int I_1 dt - L_1 \frac{dI_1}{dt} - RI_1 = 0$ で $\frac{1}{C_1}\int I_1 dt = V_{C1}$

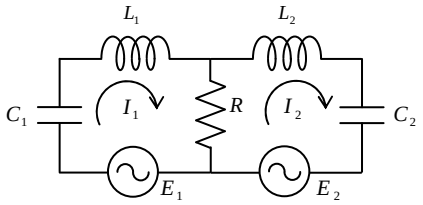
とおけば，$E_1 - V_{C1} - L_1 \frac{dI_1}{dt} - RI_1 = 0$ 。

（CLC 回路はこの方法で解くと良い。）

また $\frac{dV_{C1}}{dt} = \frac{1}{C_1} I_1$ だから，$y_1 = I_1$，$y_2 = V_{C1}$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} I_1 \\ V_{C1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{L_1} - \frac{y_2}{L_1} - \frac{Ry_1}{L_1} \\ \frac{y_1}{C_1} \end{bmatrix},$$

並列回路の方程式の立て方



$$E_1 - \frac{q_1}{C_1} - L_1 \frac{dI_1}{dt} - R(I_1 - I_2) = 0$$

$$E_2 - R(I_1 - I_2) - L_2 \frac{dI_2}{dt} - \frac{q_2}{C_2} = 0$$

$$I_1 = \frac{dq_1}{dt},\ I_2 = \frac{dq_2}{dt}$$

よって，以下の行列式となる。

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_3 \\ y_4 \\ -\frac{Ry_3}{L_1} + \frac{Ry_4}{L_1} - \frac{y_1}{L_1C_1} + \frac{E_1}{L_1} \\ \frac{Ry_3}{L_2} - \frac{Ry_4}{L_2} - \frac{y_2}{L_2C_2} + \frac{E_2}{L_2} \end{bmatrix}$$