バイオメカニズム特論

第１回講義内容

１．スケーリング

　動物の跳躍，走行速度について

　飛行する鳥の体重限界

２．樹木の枝の2.5乗則

３．血管の３乗則

生物に学ぶことは役にたつか？

URL: http://www.wbsj.org/birdwatching/contribution/97_910j.html

小さな渦の発生が空力音を減少させる.

鋸（のこぎり）歯状の羽毛　　五〇〇系電車の屋根上の翼型パンタグラフ

本質的な物理現象に注目する必要がある.

スケーリング（Scaling）

対象物の大きさによって，特性（移動速度，消費エネルギーなど）がどのように影響するかを探ること．対象物がどのように設計されているかという基本法則を知ることができる．

アロメトリー（allometry）：$y=ax^b$ で表される関係式

・骨の長さと直径
・動物の跳躍高さ，走行速度
・鳥の飛行と体重限界

ガリレオの描いた骨

ガリレオガリレイ「新科学対話」岩波文庫

挿絵では大きい骨があまりにも太い.
どのような比率で描けばよかったか？

動物の跳躍高さに関する記述

イノシシ：助走なしで1m跳躍．体重約20kg
http://www.affrc.go.jp/seika/data_kinki/h13/kinki01045.html

ネズミ：跳躍1m,体重数百グラム
http://members.edogawa.home.ne.jp/benry/home/topikkusu/nezumi.htm

馬：オリンピック競技での障害の高さは160センチ以上，体重約450kg
http://www3.alpha-net.ne.jp/users/mushanga/ability.html

ヒョウ　2.5m　http://www.tobuzoo.com/cgi-bin/zoo/serch.php?id=26

カンガルー　2.5m　http://www.tobezoo.com/i/animal/a/akakangol.htm

ヒト　約1m（オリンピック級の選手で助走して2m）　体重約60kg

モルモット：25cm以下（跳躍は苦手），約1kg

カバ，ゾウ：跳躍しない．http://blindftp.exis.net/~spook/mongotx.html

跳躍高さ一定の理由

動物の跳躍高さが大きさに依存しない理由を示しなさい.

種々の動物の跳躍高さ

「技術者のためのバイオフィジックス入門」コロナ社

ヒント：跳躍高さ一定の理由

生物の質量M_bは代表長さLの３乗に比例.

筋力Fは脚の断面積Aに比例 → Lの２乗に比例.

これより筋力による加速度aの大きさは L に反比例.

（∵$F=M_b a$）

一方，跳躍時の加速距離sはLに比例.

→足が地面と離れる直前の速度Vを求めると…

動物の走行速度は体重に依存しないのはなぜ？
（もちろん走るのが苦手な動物もいる. ）

野ウサギ：70km/h, 2〜3 kg

チーター：100km/h，約50kg

人：36km/h以下, 70kg

クマ：約60km/h, 400kg

ゾウ：約25km/h,数千kg

動物の走行速度は体重に依存しないのはなぜ？

脚の仕事（発生可能なエネルギー）: W

W=筋力 x 収縮長さ（力が作用する距離）$\propto L^3$

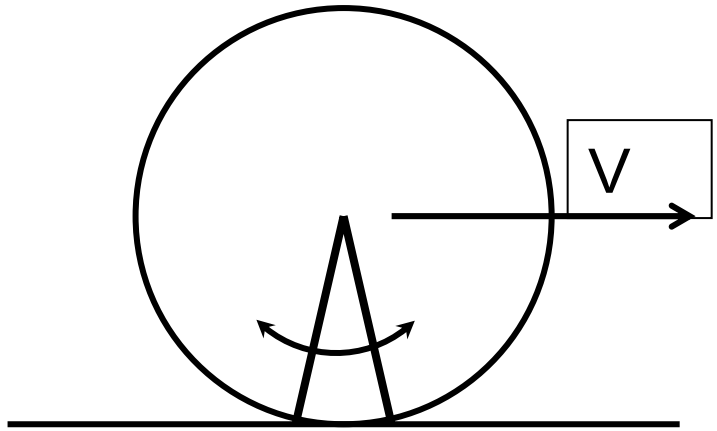
脚の往復運動で消費されるエネルギー :E

E$\propto$慣性モーメント x $\omega^2 \propto L^5$ x $(V/L)^2 = L^3 V^2$

W=EよりV（速度）は一定.

つまり重量に依存しない.

（筋特性による速度限界がある. ）



大きな鳥は飛ぶのが苦手なのはなぜ？

大きな鳥は飛ぶのが苦手なのはなぜ？

飛び上がるときに揚力を得る速度が必要．生物では速度に限界があるので，発生する揚力にも限度がある．

白鳥の水面からの離陸

http://www.gochomuseum.net/blog/archives/000621.html

大きな鳥は飛ぶのが苦手なのはなぜ？

揚力=$0.38SV^2$ （S：翼面積，V：飛行速度）

飛行中は重量Wと釣り合っている.

Boeing 777-200： V=455km/h

(W=2.6×10^6N, S=$428m^2$)

生物では離陸するために速度Vを得る必要があるが，前述したように速度限界がある.

別解：飛翔に必要なパワー

飛翔中は揚力と体重が等しいので次の関係が成立.

$Mg(=W) \propto SV^2$ より $V \propto L^{0.5}$

飛翔するための揚力Fは以下のように見積もられる.

$F \propto SV^2 \propto L^3$

揚力を生み出すために必要なパワーP

$P=FV \propto L^{3.5}$

必要なパワーは3.5乗で増大（３乗以上になる）

→　生物では大きくなるほど飛ぶのが不利になる

（∵筋特性は生物の大小に関係ないので体重が揚力を上回る）

枝の周径と重さの関係（枝の2.5乗則）

枝の重量と
直径の関係

$$W \propto d^{2.5}$$

C.D.Murray(1927)

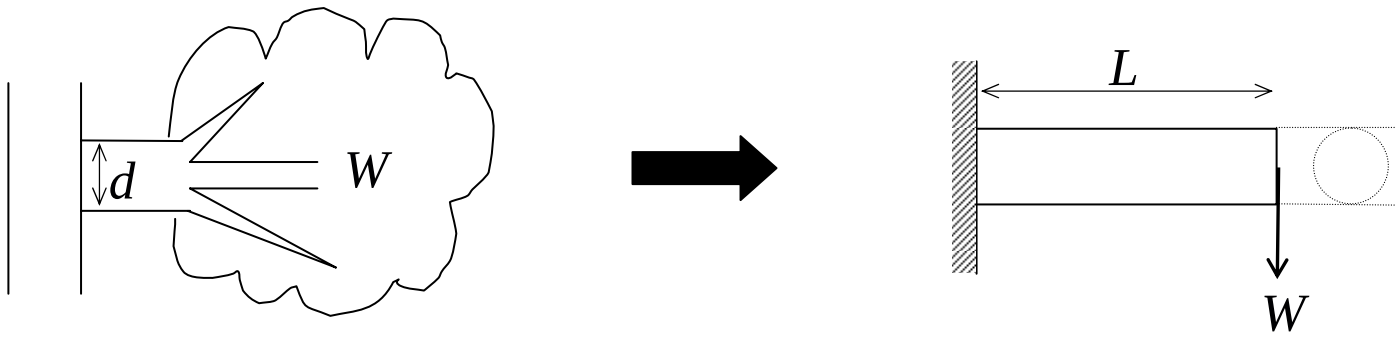
枝の力学モデル

$$\sigma = \frac{M}{Z} = \frac{WL}{Z} \qquad (1)$$

$$Z = \frac{\pi d^3}{32} \qquad (2)$$

$$W = \frac{\pi d^2}{4}\rho L \qquad (3)$$

$$\Bigg\} \quad W \propto d^{2.5}$$



樹木の枝の分岐則（2.5乗則）

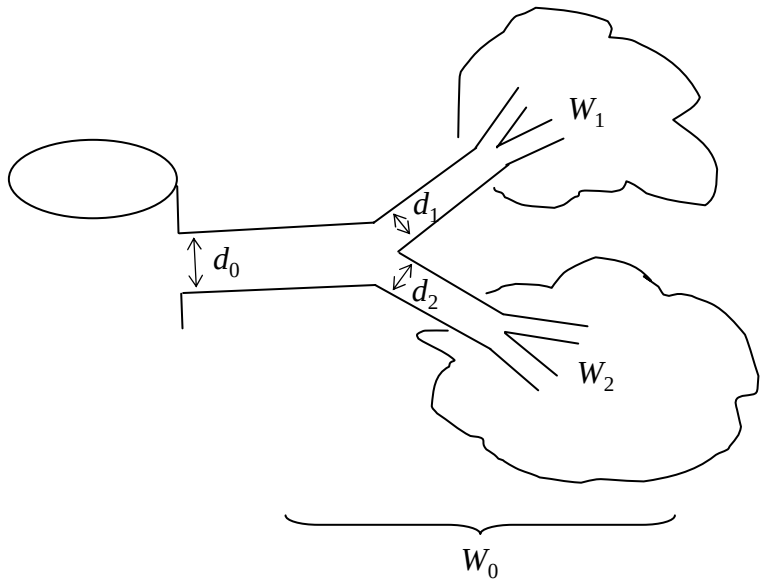
枝の重量と直径の関係

$$W \propto d^{2.5}$$

分岐した枝の関係

$$d_0^{2.5} = d_1^{2.5} + d_2^{2.5}$$

C.D.Murray(1927)



枝の2.5乗則についての疑問

導出モデルでは，枝は幹に対して直角方向に生えていると設定しているが，枝が幹に対して直角でない場合でも2.5乗則は成立するのだろうか？（成立するならどんな場合か？）

枝の角度の影響

$$\sigma = \frac{M}{Z} = \frac{WL}{Z}\cos\theta \qquad (1)$$

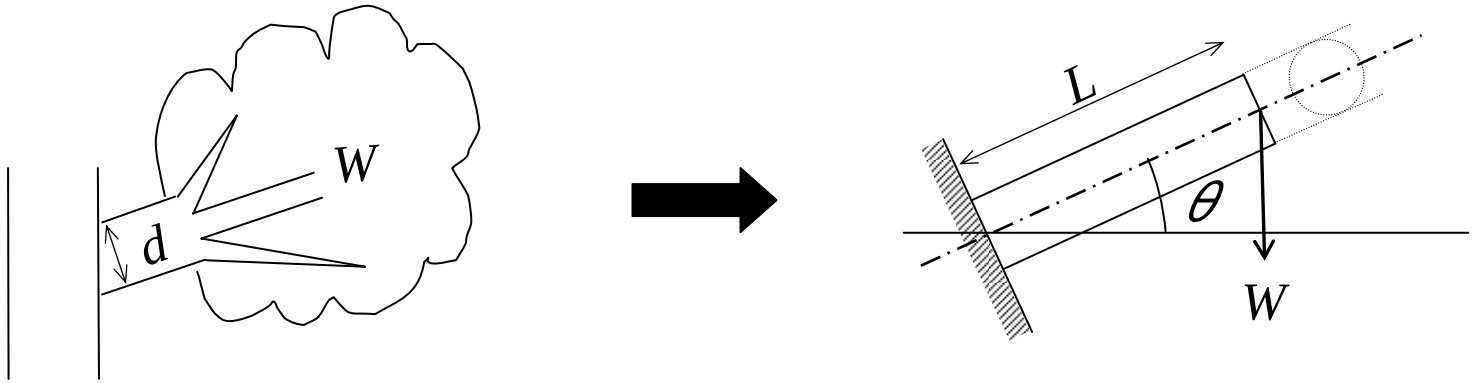
$$Z = \frac{\pi d^3}{32} \qquad (2)$$

$$W = \frac{\pi d^2}{4}\rho L \qquad (3)$$

指数には影響しない.

$$W \propto d^{2.5}$$

対数グラフなら誤差となって現れる.（同じ角度の枝を選んだ方がよい.）



血管分岐の法則（３乗則）

$$r_0^n = r_1^n + r_2^n \qquad n = 2.8 \sim 3.2$$

C.D.Murray(1927)

指数が２と３でどんな違いが出るのか.
n=2ならば分岐後も同じ流速になる.
では，n=3の場合には分岐後の流速はどうなる？

答：分岐後の半径は2乗よりも大きい→流速は遅くなる

血管分岐の法則（３乗則）の導出

$$r_0^n = r_1^n + r_2^n \qquad n = 2.8 \sim 3.2$$

C.D.Murray(1927)

血液供給は諸器官の活動を維持するのに必須.
→多すぎると無駄，少なすぎると支障
→したがって生命維持には適度な血液流量が必要
→何らかの法則性が成立していると予想.

Murray の最小仕事モデル

基本的な考え方（一本の血管について考える）

・血管半径が小さすぎると

→粘性抵抗が増大→機械的エネルギーが増大.　(not good)

→管内血液が減少→化学的エネルギーが減少.　(good)

・血管半径が大きすぎると

→粘性抵抗が減少→機械的エネルギーが減少.　(good)

→管内血液が増大→化学的エネルギーが増大.　(not good)

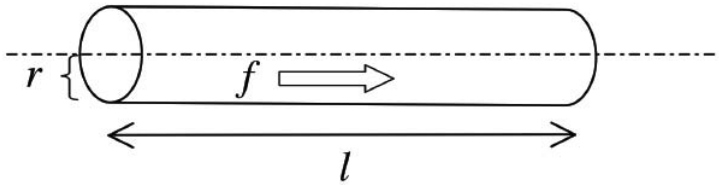
※化学的エネルギー：血管内の血液を活性化させておくのに必要なエネルギー.　管内血液量に比例（小さい方がよい）.

機械的エネルギーE_mと化学的エネルギーE_cの総和の最小化

Murray の最小仕事モデル（続き）

$$F = E_m + E_c = \Delta p f + kV$$ （kは定数）

$$f = \frac{\Delta p}{l}\frac{\pi r^4}{8\mu}$$ より



$$F = \frac{8\mu f^2 l}{\pi r^4} + k\pi r^2 l$$

仮定：血管内はポアズイユ流れ
（両端の圧力差をΔpとする．）

Fの最小値を求めるためにF をrで偏微分すると
以下の関係式が得られる.

$$\frac{f}{r^3} = \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{k}{\mu}} = const.$$

←この計算をしてみよう.

機械的エネルギーE_m

Δpf　が単位時間当たりの機械的エネルギーに相当する理由

◎仕事はFxで定義される.

◎断面積Aの管内の流体がΔtにΔxだけ押し出されている状況を考える.

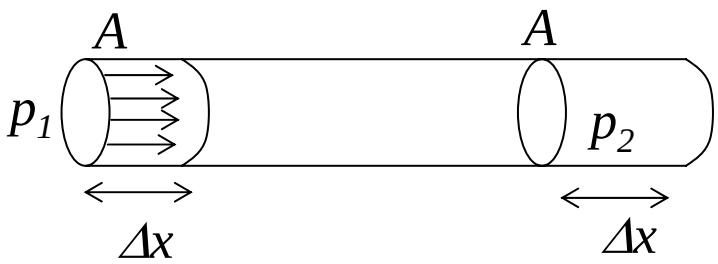
入口側で液体に対してなされる仕事は $p_1A\Delta x$.
出口側の面では，圧力p_2が常に加わっている状態なので，
流体が外部に対して行う仕事は，$p_2A\Delta x$.
したがって，管内で流体の運動に必要なエネルギーは

$$p_1A\Delta x-p_2A\Delta x=（p_1-p_2）A\Delta x=\Delta pA\Delta x$$

単位時間当たりでは

$$\Delta pA\Delta x/\Delta t=\Delta pf$$

となる.



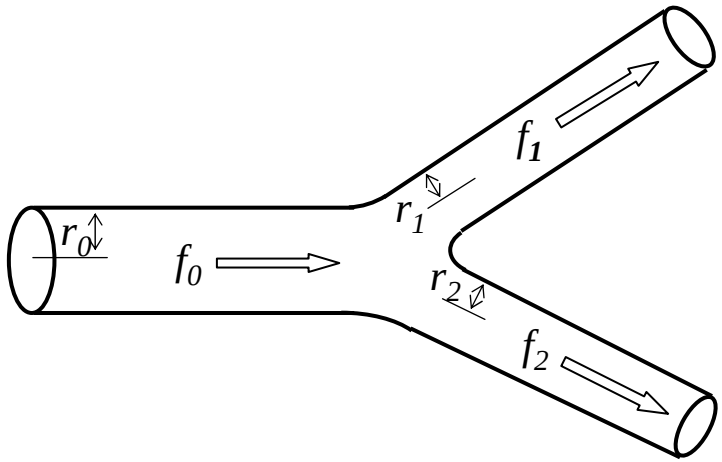
Murray の最小仕事モデル（続き）

入口側，出口側の流量を f_0, f_1, f_2 とすると

$$\frac{f_0}{r_0^3} = \frac{f_1}{r_1^3} = \frac{f_2}{r_2^3}$$

$f_0 = f_1 + f_2$ より

$$r_0^3 = r_1^3 + r_2^3$$



別解：血管の適応フィードバックによる3乗則の導出

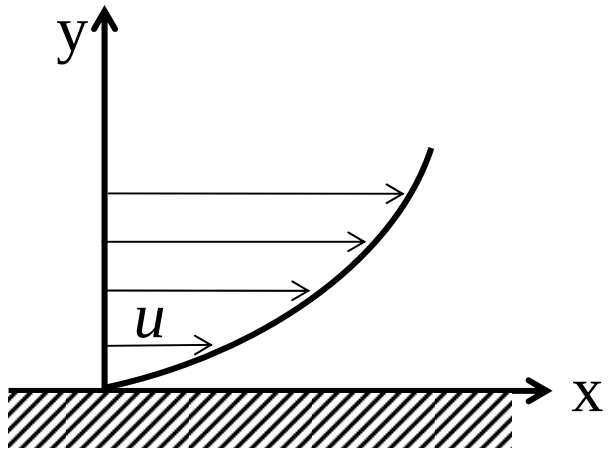
血管の３乗則は血管半径の大小を問わず成立.

→血管自身が血流を把握する機能があるはず.

→学説：血管内壁に作用するずり応力を検出（神谷ら，1980）

ずり応力

$$\tau = \frac{du}{dy} \cdot \mu$$



円管内ずり応力の導出

管内流れ　$u = \left(-\frac{dp}{dx}\right)\frac{1}{4\mu}a^2\left\{1-\left(\frac{r}{a}\right)^2\right\}$

$f = \left(-\frac{dp}{dx}\right)\frac{\pi a^4}{8\mu}$　の関係から

$$u = \frac{2f}{\pi a^2}\left\{1-\left(\frac{r}{a}\right)^2\right\}$$

r　a

$$\tau = \mu \left.\frac{du}{dr}\right|_{r=a} =$$

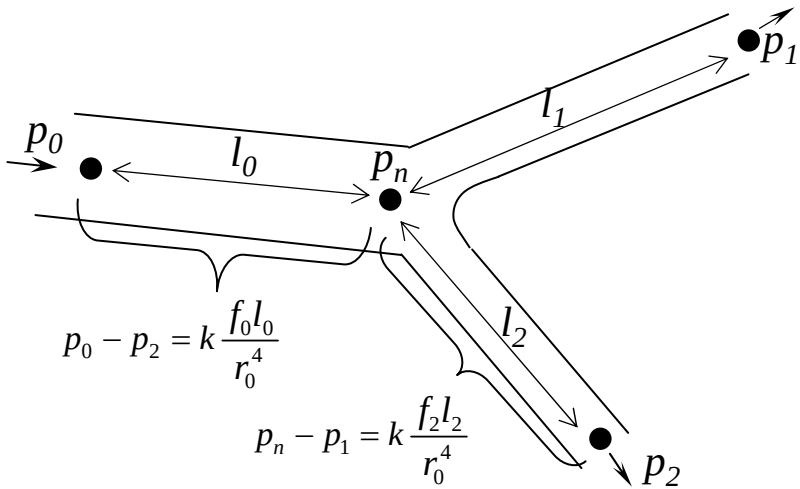
←この計算をしてみよう.

（上図の座標の取り方に注意.）

血液量最小による3乗則の導出

Kamiya and Togawaらの方法（1972）

◎圧力差$\Delta p_1 = p_1 - p_0$，$\Delta p_2 = p_2 - p_0$を一定とした時に管内の血液量が最小となる条件を求める．（端点の圧力，p_0, p_1, p_2と各血管の流量f_0, f_1, f_2が与えられている．）



動物の寿命

ほ乳類

$$t_{life} = 11.8 M_b^{0.20}$$

鳥類

$$t_{life} = 28.3 M_b^{0.19}$$

"Scaling" by Scmidt-Nielsen より

なぜ0.2乗則になるのか合理的に説明できない.

ほ乳類は例外か？　体重60kg で27歳！（50kg→25歳）

本川達雄「ゾウの時間ネズミの時間」中公新書

人間の寿命

世界の寿命，40年で19歳延びる

46歳→65歳

朝日新聞夕刊1994.6.13

平安時代頃の寿命は？

立川昭二：日本人の病歴（中公新書）、鬼頭宏：日本二千年の人口史（PHP研究所）によれば20〜30歳らしい.

参考：イヌも最近１２年間で３歳寿命が延びた（農工大調査）.

アロメトリーの解釈の注意

体重が大きい方が寿命が長いか？

ほ乳類 $$t_{life} = 11.8 M_b^{0.20}$$

上式は種の間の関係を示しているが種内については対象としていない.（同一の種で体重と寿命を議論することはできない.）

スケーリングのまとめ

- スケーリングは，現象の本質を理解するのに強力な手法である.
- スケーリングの導出は，簡単そうにみえるが，実は難しい．総合的な知識と現象の本質を捉える力が必要である．モデルを限界まで単純化しているために，本質的なファクターが抜けるととんでもない関係式が出てくる恐れがある.
- 単純化したことによって，細かい特徴は表現できないことに留意する必要がある．得られた法則で前提条件を無視して対象を解釈しようとするのは危険である.（法則が単純なだけに注意しないとやってしまう危険がある．）

第一回課題：ボートのスケーリング

1, 2, 4, 8人の漕ぎ手によるボート競技のスピード（オリンピックあるいはそれに準ずる大会での記録）を調べてみると，漕ぎ手人数に対して速度が1/9乗で増加している．この法則はスケーリングの理論で説明可能か？

第１回講義おわり