材料強度学

Mechanical Properties of Structural Materials

(線形破壊力学シリーズ)

第1回(10/13)：破壊様式とGriffith理論

第2回(10/20)：応力拡大係数と破壊靭性値

◎第3回(11/8)：Irwinの相似則 - エネルギー解放率と応力拡大係数の関係 -

講義の目標：脆性材料の破壊力学を理解する.

今回の目標

1. エネルギー解放率の定義とその物理的意味を理解する.

2. エネルギー解放率と応力拡大係数の関係, 臨界エネルギー解放率 (破壊エネルギー) と破壊靭性の関係を理解する.

前回の復習

1．3つの亀裂開口モード

2．亀裂先端の応力場→応力拡大係数

3．亀裂進展の条件→破壊靭性

4．亀裂先端の小規模降伏
　→平面ひずみ，平面ひずみ破壊靭性

亀裂進展のクライテリオン

●Griffith理論→ポテンシャル計算に基づく亀裂進展条件

$$\sigma \geq \sqrt{\frac{2\gamma E'}{\pi c}}$$

両者が与える亀裂進展のクライテリオンは同じ物理的意味をもつか？

それとも独立したものか？→どちらが妥当か？

●臨界応力拡大係数（破壊靭性）

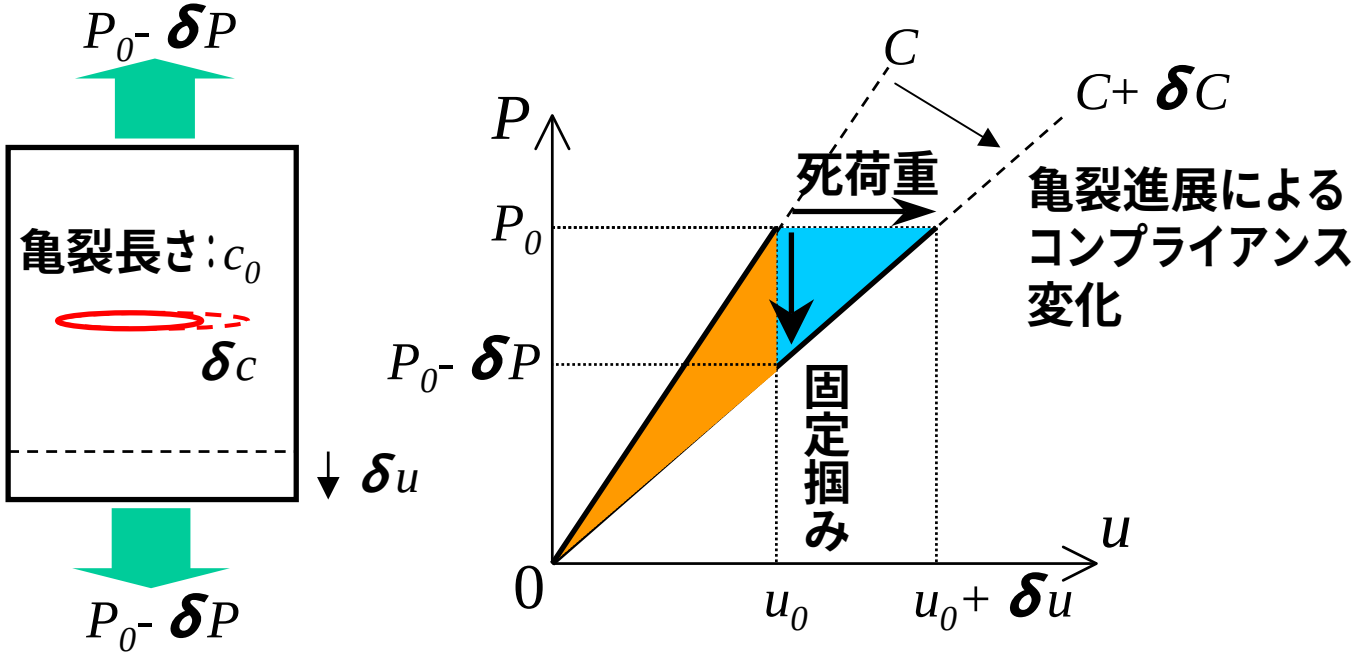
$$K_{\mathrm{I}} = \sigma\sqrt{\pi c} > K_{\mathrm{Ic}}$$

Irwin理論の紹介－1
エネルギー論の一般化

Griffith理論では無限体中の長さ$2c$の貫通亀裂に対し，進展前後の力学系のポテンシャル変化から亀裂進展のクライテリオンを導出した．

↓ エネルギー解放率の概念導入

亀裂進展に伴う力学系のポテンシャル変化をもっと一般的に表現する．



Irwin理論の紹介－2
ポテンシャル計算

●外力のポテンシャル変化 $\delta L = \begin{cases} 0 & \text{→固定掴み} \\ -P_0\,\delta u & \text{→死荷重} \end{cases}$

●弾性歪エネルギー変化 $\delta U = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}u_0\,\delta P & \text{→固定掴み} \\ \dfrac{1}{2}P_0\,\delta u & \text{→死荷重} \end{cases}$

●破面形成に消費されるエネルギー $\delta W = 2\gamma\,\delta c$

ここで, $u_0 = C\,P_0 \rightarrow \delta u = \delta C\,P_0 + \delta P\,C$ $\begin{cases} \delta P = -\dfrac{\delta C\,P_0}{C} & \text{→固定掴み} \\ \delta u = \delta C\,P_0 & \text{→死荷重} \end{cases}$

Irwin理論の紹介－3
エネルギー解放率 (Energy Release Rate)

∴力学系のポテンシャル変化

$$\delta G = \delta L + \delta U + \delta W = -\frac{P_0^{\ 2}}{2}\delta C + 2\gamma\,\delta c$$

微小亀裂進展 $\delta c \to 0$ とした時，$\dfrac{dG}{dc} = -\dfrac{P_0^{\ 2}}{2}\dfrac{dC}{dc} + 2\gamma$

力学系の変化の方向は $\dfrac{dG}{dc} \le 0$ であるから，

$$2\gamma \le \frac{P_0^{\ 2}}{2}\frac{dC}{dc}$$

亀裂進展の駆動力：**エネルギー解放率** g

Irwin理論の紹介－4
仮想仕事の原理

亀裂先端の応力場： $\sigma_y = \dfrac{K_{\mathrm{I}}}{\sqrt{2\pi x}}$

δc進展した亀裂の先端からx後方の開口変位：

$$v(x) = \pm \frac{\kappa + 1}{2\mu} K_{\mathrm{I}}(c + \delta c)\sqrt{\frac{\delta c - x}{2\pi}}$$

ここで， $\kappa = \begin{cases} 3 - 4\nu & \rightarrow \text{平面歪} \\ \dfrac{3-\nu}{1+\nu} & \rightarrow \text{平面応力} \end{cases}$

⑴ 亀裂先端に δc切込みを入れ，亀裂面に作用していた応力を保つように外力を（仮想的に）作用させ亀裂面が閉じたままにする．

⑵ （仮想的）外力を徐々に解放させ，亀裂面を開かせる．

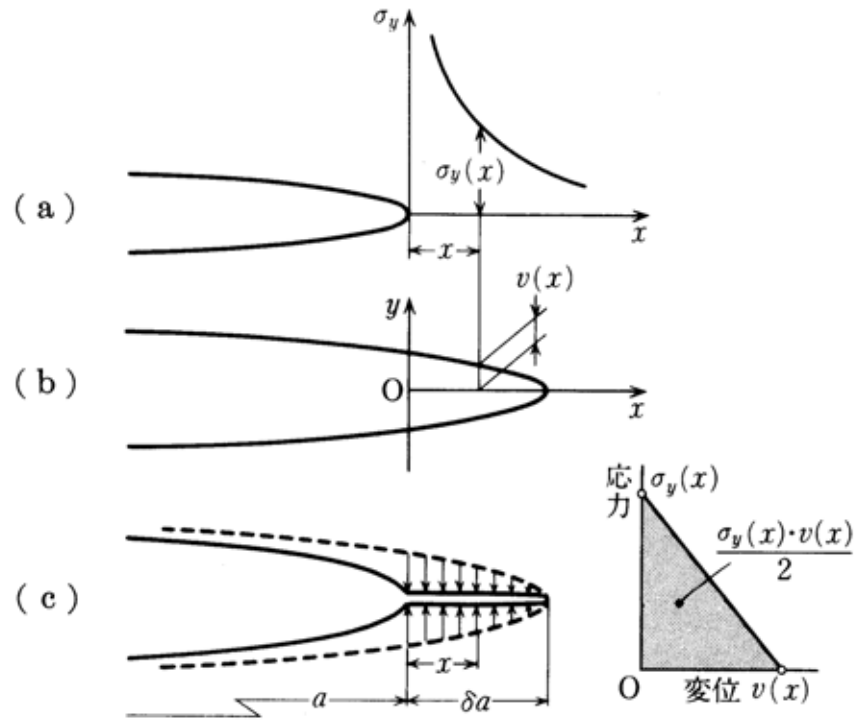


図 4.5　クラック成長に伴うエネルギ変化の計算

Irwin理論の紹介（続き）
Irwinの相似則

仮想的外力が為した仕事：$2\int_0^{\delta c}\frac{\sigma_y(x)v(x)}{2}dx=\frac{\kappa+1}{8\mu}K_{\mathrm{I}}(c)K_{\mathrm{I}}(c+\delta c)\delta c$

エネルギー解放率をg_{I}とすれば，（仮想的外力がなした仕事）＝$g_{\mathrm{I}}\,\delta c$

微小亀裂進展 $\delta c\to 0$ とした時，$g_{\mathrm{I}}=\frac{\kappa+1}{8\mu}K_{\mathrm{I}}^{\ 2}=\frac{K_{\mathrm{I}}^{\ 2}}{E'}$ →Irwinの相似則

ここで，ヤング率Eと剛性率μとの関係 $E=2(1+\nu)\mu$ を用いた．

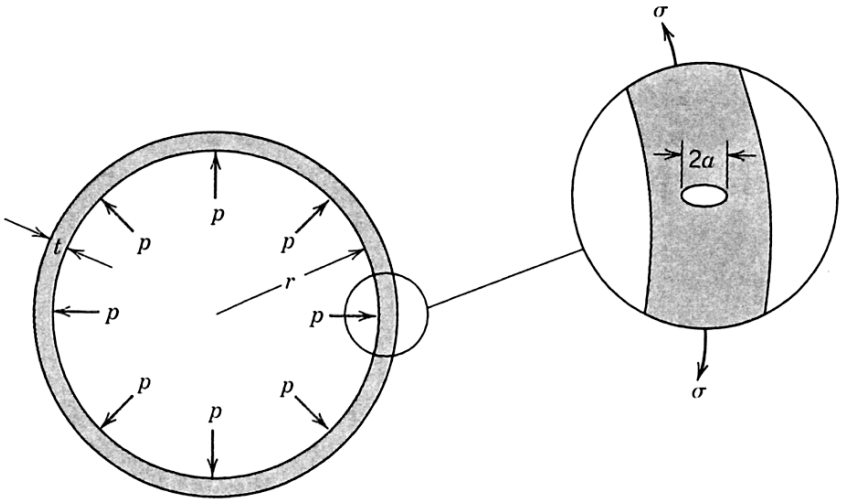
ポイント：

応力拡大係数とエネルギー解放率は可換である．

→ポテンシャル計算に基づく亀裂進展のクライテリオン（Griffith理論）と破壊靭性で与えられるクライテリオンは物理的に等価．

演習問題

ここに厚さtの材料でできた半径rの球殻状のタンクがあり，内部の流体によって圧力pを受けるものとする．



1つの設計指針として，亀裂進展による脆性破壊を起こさせず，タンクを塑性変形させて内圧を減少させるという方法（安全設計1）がある．

もう1つの設計指針にはLeak-before-Breakがある．それは，壁厚を脆性破壊が生じる臨界亀裂長さよりも薄くすることにより，破壊する前に流体漏れを生じさせて内圧を減少させる方法（安全設計2）である．この方法によれば流体漏れを検知することによって破壊を未然に防ぐこともできる．

演習問題（続き）

（1）安全設計1を採用する場合，次の材料のどちらでタンクを作製するべきか？

材料A：降伏点500MPa，平面ひずみ破壊靭性100MPa$\sqrt{m}$

材料B：降伏点1.5GPa，平面ひずみ破壊靭性50MPa$\sqrt{m}$

（2）安全設計2を考える．上記の2つの材料で作製した同じ半径・同じ壁厚のタンクを比較した場合，どちらの材料の方がどれだけ高い圧力を流体が漏れるまでに保持できるか？

ただし，いずれも平面ひずみ状態である場合について考えよ．