第９回：弧長法　Arc-length method

幾何学的非線形解析では増分理論を用いたスキームが多く用いられることは既に述べた通りである。この時に注意しなければならない点は、その荷重段階あるいは変位段階に応じた増分パラメータを適切に選択する必要性があるという点である。

例えば、Fig.3.1 に示す荷重変位関係を追跡する場合を考える。この時、荷重増分法により$D l$を一定として計算する（図中の○）と、各ステップ間での変位増分の値はステップ数の増加に伴い急激に増加してしまい、最悪の場合反復計算途中で、解が発散してしまうこともある。そこで、このような場合には変位を一定（制御）とする手法が採られる（図中の●）。

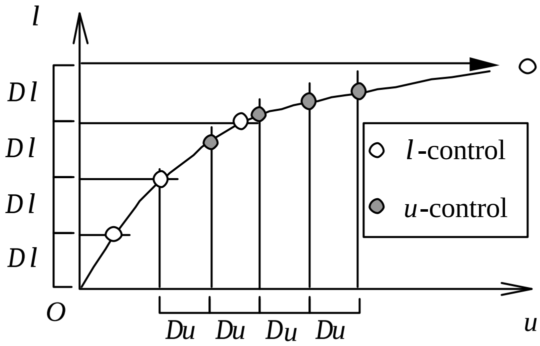


Fig.3.1 incremental control parameter

一般的に言えば、全ての変位成分および荷重パラメータのうち各ステップにおいて最も増加する成分を制御することが望ましいのである。ただし、現実にはこのようなことは不可能に近いために、近年では弧長法と呼ばれる増分制御法が採られる場合が多い。

弧長法では、Fig.3.2 に示すようにベクトル長(Dl)を増分パラメータとして採用する。弧長法では次の式が基本式となっている。

$$\boldsymbol{K}_T D\boldsymbol{u} = D l \boldsymbol{P} - \boldsymbol{G} \qquad \text{Equilibrium} \qquad (3.1a)$$

$$D\boldsymbol{u}\cdot D\boldsymbol{u} + D l^2 = D l^2 \qquad \text{Arc-length} \qquad (3.1b)$$

このように解くことにより分岐点以外（すなわち極限点）での剛性マトリクスの特異性を回避してつりあい経路を求めることが出来る。

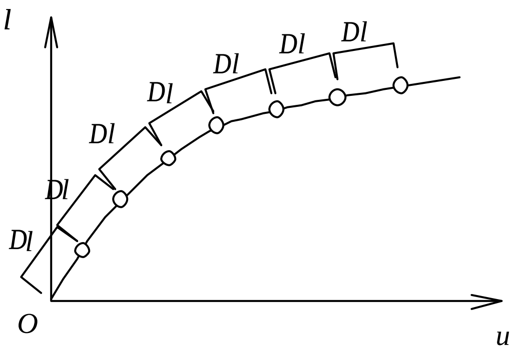


Fig.3.2　Arc-length method's concept

通常、式(3.1)はブロック消去法（BE）を用いて解かれる。式(3.1a)を解くために、$D\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{K}_T^{-1}\boldsymbol{P}$，$D\boldsymbol{u}_2 = -\boldsymbol{K}_T^{-1}\boldsymbol{G}$ で定義される増分変位ベクトルを導入する。これにより、式(3.1a)の解は、

$$D\boldsymbol{u} = D l D\boldsymbol{u}_1 + D\boldsymbol{u}_2 \qquad (3.2)$$

となる。これを式(3.1b)に代入する。

$$(D l D\boldsymbol{u}_1 + D\boldsymbol{u}_2)\cdot(D l D\boldsymbol{u}_1 + D\boldsymbol{u}_2) + D l^2 = D l^2 \quad \rightarrow \quad (D\boldsymbol{u}_1\cdot D\boldsymbol{u}_1 + 1) D l^2 + 2 D\boldsymbol{u}_1\cdot D\boldsymbol{u}_2 D l + D\boldsymbol{u}_2\cdot D\boldsymbol{u}_2 - D l^2 = 0 \qquad (3.3)$$

これは$D l$に関するスカラー方程式であるから解は容易に求められる。

$$D l^{\langle 1\rangle}, D l^{\langle 2\rangle} = \frac{-D\boldsymbol{u}_1{}^T D\boldsymbol{u}_2 \pm \sqrt{D\boldsymbol{u}_1{}^T D\boldsymbol{u}_2{}^2 + \left(1 + D\boldsymbol{u}_1{}^T D\boldsymbol{u}_1\right)\left(D l^2 - D\boldsymbol{u}_2{}^T D\boldsymbol{u}_2\right)}}{1 + D\boldsymbol{u}_1{}^T D\boldsymbol{u}_1}$$

(3.4)

この結果を式(3.2)に代入することにより、$D\boldsymbol{u}$ は次のように表される。

$$D\boldsymbol{u}^{\langle 1\rangle} = D l^{\langle 1\rangle} D\boldsymbol{u}_1 + D\boldsymbol{u}_2 \quad \text{and} \quad D\boldsymbol{u}^{\langle 2\rangle} = D l^{\langle 2\rangle} D\boldsymbol{u}_1 + D\boldsymbol{u}_2 \qquad (3.5)$$

ただし、正負の判定は前ステップ(n-1)の変位増分ベクトルおよび荷重増分パラメータから成る空間上の方向ベクトルと本ステップ(n)の同方向ベクトルのなす角度$q^{<i>}$が小さくなる符号を真とする。

$$\cos q^{\langle j\rangle} = \frac{1}{D l^2}\left\langle {}^{n-1}D\boldsymbol{u}^T \quad {}^{n-1}D l \right\rangle \begin{Bmatrix} D\boldsymbol{u}^{\langle j\rangle} \\ D l^{\langle j\rangle} \end{Bmatrix} = \left({}^{n-1}D\boldsymbol{u}^T D\boldsymbol{u}^{\langle j\rangle} + {}^{n-1}D l D l^{\langle j\rangle}\right) / D l^2$$

上式に式(1.14)を代入すると、

$$q^{\langle j\rangle} = \arccos\left\{\frac{{}^{n-1}D\boldsymbol{u}^T D\boldsymbol{u}_2 + \left({}^{n-1}D\boldsymbol{u}^T D\boldsymbol{u}_1 + {}^{n-1}D l\right) D l^{\langle j\rangle}}{D l^2}\right\} \qquad (3.6)$$

注意　Remarks

- NAP では、Dl を入力とするのではなく、Dl^2 を入力するようにしている。
- 増分計算の開始点では、本来不平衡力ベクトル $\boldsymbol{G}$ は極めて小さいことから、$D\boldsymbol{u}_2$ を零ベクトルとみなすことも可能ではあるが、NAP では式(3.4)により計算している。

次に、Newton-Raphson 法による収束計算に用いる式を求める。式(3.2)と同様に k イテレーションの変位補正ベクトルは次のように表される。

$$dD\boldsymbol{u} = dDl\,D\boldsymbol{u}_{1(k)} + D\boldsymbol{u}_{2(k)} \qquad D\boldsymbol{u}_{1(k)} = \boldsymbol{K}_{T(k)}{}^{-1}\boldsymbol{P},\quad D\boldsymbol{u}_{2(k)} = -\boldsymbol{K}_{T(k)}{}^{-1}\boldsymbol{G}_{(k)} \tag{3.7}$$

$$D\boldsymbol{u}_{(k)} = D\boldsymbol{u}_{(k-1)} + dD\boldsymbol{u} = D\boldsymbol{u}_{(k-1)} + dDl\,D\boldsymbol{u}_{1(k)} + D\boldsymbol{u}_{2(k)}, \qquad Dl_{(k)} = Dl_{(k-1)} + dDl \tag{3.8}$$

となる。これを式(3.1b)に代入する。

$$\left(D\boldsymbol{u}_{(k-1)} + dDl\,D\boldsymbol{u}_{1(k)} + D\boldsymbol{u}_{2(k)}\right)\cdot\left(D\boldsymbol{u}_{(k-1)} + dDl\,D\boldsymbol{u}_{1(k)} + D\boldsymbol{u}_{2(k)}\right) + \left(Dl_{(k-1)} + dDl\right)^2 = Dl^2$$

$$\rightarrow \begin{aligned} &\left(1 + D\boldsymbol{u}_{1(k)}\cdot D\boldsymbol{u}_{1(k)}\right)dDl^2 + 2\left(D\boldsymbol{u}_{1(k)}\cdot D\boldsymbol{u}_{(k-1)} + D\boldsymbol{u}_{1(k)}\cdot D\boldsymbol{u}_{2(k)} + Dl_{(k-1)}\right)dDl \\ &+ D\boldsymbol{u}_{(k-1)}\cdot D\boldsymbol{u}_{(k-1)} + Dl_{(k-1)}{}^2 + 2D\boldsymbol{u}_{(k-1)}\cdot D\boldsymbol{u}_{2(k)} + D\boldsymbol{u}_{2(k)}\cdot D\boldsymbol{u}_{2(k)} - Dl^2 = 0 \end{aligned} \tag{3.9}$$

$$dDl^{\langle 1\rangle}, dDl^{\langle 1\rangle} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a} \qquad \begin{aligned} a &= 1 + D\boldsymbol{u}_{1(k)}\cdot D\boldsymbol{u}_{1(k)} \\ b &= D\boldsymbol{u}_{1(k)}\cdot D\boldsymbol{u}_{(k-1)} + D\boldsymbol{u}_{1(k)}\cdot D\boldsymbol{u}_{2(k)} + Dl_{(k-1)} \\ c &= D\boldsymbol{u}_{(k-1)}\cdot D\boldsymbol{u}_{(k-1)} + Dl_{(k-1)}{}^2 + 2D\boldsymbol{u}_{(k-1)}\cdot D\boldsymbol{u}_{2(k)} + D\boldsymbol{u}_{2(k)}\cdot D\boldsymbol{u}_{2(k)} - Dl^2 \end{aligned} \tag{3.10}$$

この結果を式(3.8)に代入することにより、$dD\boldsymbol{u}$, $D\boldsymbol{u}$ は次のように表される。

$$dD\boldsymbol{u}^{\langle 1\rangle} = dDl^{\langle 1\rangle}D\boldsymbol{u}_{1(k)} + D\boldsymbol{u}_{2(k)} \quad \text{and} \quad dD\boldsymbol{u}^{\langle 2\rangle} = dDl^{\langle 2\rangle}D\boldsymbol{u}_{1(k)} + D\boldsymbol{u}_{2(k)} \tag{3.11}$$

$$D\boldsymbol{u}_{(k)}{}^{\langle 1\rangle} = D\boldsymbol{u}_{(k-1)} + dDl^{\langle 1\rangle}D\boldsymbol{u}_{1(k)} + D\boldsymbol{u}_{2(k)} \quad \text{and} \quad D\boldsymbol{u}_{(k)}{}^{\langle 2\rangle} = D\boldsymbol{u}_{(k-1)} + dDl^{\langle 2\rangle}D\boldsymbol{u}_{1(k)} + D\boldsymbol{u}_{2(k)} \tag{3.12}$$

ただし、正負の判定は前収束計算(k-1)の変位増分ベクトルおよび荷重増分パラメータから成る空間上の方向ベクトルと本収束計算(k)の同方向ベクトルのなす角度$q^{<i>}$が小さくなる符号を真とする。

$$\cos q^{\langle j\rangle} = \frac{1}{Dl^2}\left\langle D\boldsymbol{u}_{(k-1)}{}^T \quad Dl_{(k-1)}\right\rangle\begin{Bmatrix} D\boldsymbol{u}_{(k)}{}^{\langle j\rangle} \\ Dl_{(k)}{}^{\langle j\rangle}\end{Bmatrix} = \left(D\boldsymbol{u}_{(k-1)}{}^T D\boldsymbol{u}_{(k)}{}^{\langle j\rangle} + Dl_{(k-1)}Dl_{(k)}{}^{\langle j\rangle}\right)/Dl^2$$

上式に式(1.14)を代入すると、

$$q^{\langle j\rangle} = \arccos\left(\frac{D\boldsymbol{u}_{(k-1)}\cdot D\boldsymbol{u}_{(k-1)} + Dl_{(k-1)}{}^2 + \left(D\boldsymbol{u}_{(k-1)}\cdot D\boldsymbol{u}_{1(k)} + Dl_{(k-1)}\right)dDl^{\langle j\rangle} + D\boldsymbol{u}_{(k-1)}\cdot D\boldsymbol{u}_{2(k)}}{Dl^2}\right) \tag{3.13}$$

この方法を、特にクリスフィールド法と呼ばれる場合がある。

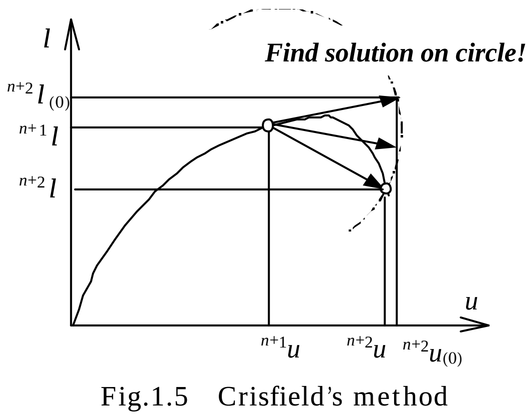
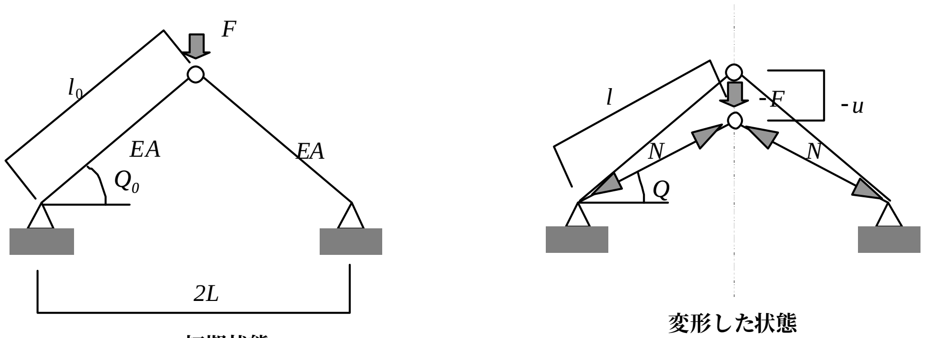


Fig.1.5　Crisfield’s method

採点は、出席全部で 80 点(13/13)　レポート 10 点／個で 2 個

＃レポート②



初期状態　　変形した状態

図のような架構について以下の問に答えよ。ただし、外力ベクトル（今の問題では F でスカラー）と内力ベクトル R、他の関係が次のように与えられているものとする。

平衡方程式：　$G = R - F = 0$　　または、$G = 2N\sin Q - F = 0$

（A.1）

また、　軸力-回転関係：　$N = \dfrac{EA}{l_0}\left(l - l_0\right) = \dfrac{EAL}{l_0}\left(\dfrac{1}{\cos Q} - \dfrac{1}{\cos Q_0}\right)$

（A.2）

回転-変位関係：　$Q = \arctan\left(\dfrac{u}{L} + \tan Q_0\right)$

（A.3）

問１　ある時刻 t において平衡状態（^{t}F, ${}^{t}d$）にあるものとして、時刻 t+*D*t における増分量に対する線形平衡方程式を求めよ。ヒント：増分量Dd, DF を用いて、時刻 t+*D*t における変位を ${}^{t+Dt}u = {}^{t}u + Du$ とし、荷重 ${}^{t+Dt}F$ を ${}^{t}F + DF$ とする。これを式（A.1）および（A.3）に代入し、Taylor 展開し、増分量について線形化する。

$$ {}^{t+Dt}G = {}^{t+Dt}R - {}^{t+Dt}F \cong \left\{ {}^{t}R + \frac{\partial R}{\partial u} Du \right\} - \left\{ {}^{t}F + DF \right\} \Leftrightarrow 0 $$

なお、$\dfrac{\partial R}{\partial u}$ は、以下のように求められる。R と変位 u の関係が陽な表現で与えられていなくとも次のように求められる。すなわち、式(A.2), (A.3)より、$\dfrac{\partial N}{\partial u} = \dfrac{EAL}{l_0}\dfrac{\sin Q}{\cos^2 Q}\dfrac{\partial Q}{\partial u}$，　$\dfrac{\partial Q}{\partial u} = \dfrac{1}{L}\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{u}{L} + \tan Q_0\right)^2}$ であり、さらに、式(A.1b)より、$\dfrac{\partial R}{\partial u} = 2\dfrac{\partial N}{\partial u}\sin Q + 2N\cos Q\dfrac{\partial Q}{\partial u}$ であるから、これらより、$\dfrac{\partial R}{\partial u}$ が求められる。

問２　このモデルの荷重変位関係を増分法および Newton 法を用いて求めよ。

ヒント：修正量dDu を用いて、収束計算 k+1 における変位を ${}^{t+Dt}_{(k+1)}u = {}^{t+Dt}_{(k)}u + dDu$ とする。これを式（A.1）から（A.3）に代入し、Taylor 展開し、増分量について線形化する。

$$ {}^{t+Dt}_{(k+1)}G = {}^{t+Dt}_{(k+1)}R - {}^{t+Dt}F \cong \left\{ {}^{t+Dt}_{(k)}R + {}^{t+Dt}_{(k)}\left(\frac{\partial R}{\partial u}\right) dDu \right\} - {}^{t+Dt}F \Leftrightarrow 0 $$

したがって、収束計算における線形化された方程式は ${}^{t+Dt}_{(k)}\left(\frac{\partial R}{\partial u}\right) dDu = {}^{t+Dt}F - {}^{t+Dt}_{(k)}R$ **となる。**