第8回:幾何学的非線形問題の解法 Newton - Raphson 法

レポート : 簡単なモデルの荷重変位関係



Fig.1.2.1 スリーヒンジモデル

平衡方程式が得られた段階でどのように解(節点変位ベクトルや荷重パラメータなど)を求めるかについて説明 する Fig.1.2.1 に示すスリーヒンジモデルの荷重点での鉛直変位 dを求める。トラス材の軸剛性は EA であり、変 形後もトラス材は直線を保つものと仮定しトラス材に発生する軸力 N と伸縮 DI の関係は線形とし $N = EA/l_0 \cdot DI$ として表されるものとする。まず、変形後における加力点での力の釣り合いを考えると(上図の右参照)、 $G = 2N \sin Q - F = 0$ (1.2.1)

となる。また加力点の鉛直変位およびトラス材の伸縮は、幾何学的な関係より

 $\boldsymbol{d} = L(\tan \boldsymbol{Q} - \tan \boldsymbol{Q}_0) \quad \text{ for } \boldsymbol{U} \quad \boldsymbol{D}l = l - l_0 = L\left(\frac{1}{\cos \boldsymbol{Q}} - \frac{1}{\cos \boldsymbol{Q}_0}\right) \quad (1.2.2)$

と表される。式(1.2.2)および軸力・伸縮関係を式(1.2.1)に代入することにより荷重 F と鉛直変位**d**の関係が求め られる。

$$F = \frac{2EAL}{l_0} \left(\frac{\boldsymbol{d}}{L} + \frac{\sin \boldsymbol{Q}_0 - \sin\left(\tan^{-1}\left(\frac{\boldsymbol{d}}{L} + \tan \boldsymbol{Q}_0\right)\right)}{\cos \boldsymbol{Q}_0} \right)$$
(1.2.3)

結果を Fig.1.2.2 に示す。軸力と伸縮の関係が線形関係 $N = EA/l_0 \cdot Dl$ にあると仮定したにも関わらず、荷重 Fとdの関係は直線関係にはなく複雑な関係となっている。

これは荷重が作用することにより構造体が変形し、その結 果構造物の剛性が変化することによる。このように変形後 における形態変化を考慮した解析を幾何学的非線形解析 と呼ぶ。シェル構造のように軸力(面内力)にて外力に抵 抗するような構造形式では特にこの外力による形態の変 化(幾何学的非線形性)の影響が大きいために、シェル構 造の研究では古くからこの影響が考慮されてきている。

ここで次項以降のために平衡方程式に対する一般的記述を示しておく。まず式(1.2.1)を、



Fig. 1.2.2 荷重变位関係

 $G(\mathbf{d}, F) = R(\mathbf{d}) - F = 0$, $(R(\mathbf{d}) = 2N(\mathbf{d}) \sin Q(\mathbf{d}))$ (1.2.3)

と表現する。ここに、Rは内部応力から求められる節点力であり、内力ベクトルと呼ばれるものである。さらに 上式を多自由度表現に書き改めると次のように表される。

$$G(u,F) = R(u) - F = 0$$

(1.2.4a)

ここに、F,R,uは荷重ベクトル、内力ベクトルおよび変位ベクトルである。また荷重ベクトルが荷重分布を意味する荷重モードベクトル P と荷重の大きさを示すパラメータ1を用いてF = 1P と表されるとすれば、上式は以下のように表される。

$$G(u, I) = R(u) - IP = 0$$
 (1.2.4b)

線形解析

線形解析は力学問題において最も基本的な解析であり、この範疇においては理論解が存在する場合も多いので、 最終的に高度な非線形解析を行う場合でも基本入力データを作成した段階で入力データのチェックを兼ねる意 味で非常に有用な解析である。また、1.2.2あるいは1.2.3で述べる非線形解析においても多くのコードでは増 分理論に基づいているために、各増分段階における増分計算あるいは収斂計算段階では線形解析と同様の計算が 行われているにすぎないのである。

現実には多くの力学問題は非線形性を有しているために、式(1.2.4)中の内力ベクトル **R** は一般には変位ベクトルの高次の関数となっている。線形解析では式(1.2.4)を以下のように考える。まず、式(1.2.4)をマクローリン展開する。

$$R\Big|_{u=0} + \frac{\P R}{\P u}\Big|_{u=0} u + \frac{1}{2} u^T \frac{\P^2 R}{\P u^2}\Big|_{u=0} u + \dots - F = 0$$
(1.2.5)

ここに、()^Tは転置を表わす。ここで変位ベクトルが微小であると仮定すれば、上式中の変位ベクトルの2次以上の項は省略することができ、

$$\frac{\P R}{\P u}\Big|_{u=0} u - F = 0 \tag{1.2.6}$$

あるいは、

$$K_{L}u = F \qquad (1.27a) \quad \exists \exists k_{L} = \frac{\P R}{\P u} \Big|_{u=0} \qquad (1.2.7)$$

となる。**K**_Lは線形剛性マトリクスあるいは単に剛性マトリクスと呼ばれるものである。このように変位ベクト ルが構造物の力学的特性を変化させない程度に小さいと仮定したものが線形解析である。なお、式(1.2.5)中の **R**|_{u=0} はプレストレスなどによる初期内力ベクトルであるが、通常は零であるために式(1.2.7)では省略している。 ここで、参考のために Fig.1.2.1 に示したモデルの線形平衡方程式を求めてみる。式(1.2.3)を式(1.2.7b)に代入す ることにより線形剛性は $K_L = (2EA/l_0)\sin^2 Q_0$ となり、したがって式(1.2.7a)よりこの問題に対する線形平衡方程 式は $[(2EA/l_0)\sin^2 Q_0]d = F$ となる。

- 増分理論における基本式の誘導 -

線形解析では初期状態を基準状態として式(1.2.4)をマクロ ーリン展開し、高次項を無視することにより変位ベクトルと 荷重ベクトルの線形な関係を求めた。これに対して、非線形 解析では増分理論を適用し、ある変位レベルまで変形が進行 した段階を基準状態(n-step)とした上で、さらに変形が進 行した状態(n+1-step)を考える手法を採る場合が多い。ただ し、文献**において展開されている摂動法のように直接的 に所定の変位レベルまで求める方法もあるがここでは説明を 割愛する。



Fig.1.2.5のような荷重変位関係となる問題を考える。基準となる n-step 状態は既に十分な精度で求められて いるものとすれば、n-step から n+1-step へ移行する段階の平衡方程式は以下のように線形化される。

まず、式(1.2.4)を n-step 状態においてテイラー展開する。なお、本項では式(1.2.4b)による表現を用いるものとする。

$$\boldsymbol{R}\Big|_{\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_{u}} + \frac{\boldsymbol{\Pi}\boldsymbol{R}}{\boldsymbol{\Pi}\boldsymbol{u}}\Big|_{\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_{u}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{u} + \frac{1}{2}\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}^{T}\frac{\boldsymbol{\Pi}^{2}\boldsymbol{R}}{\boldsymbol{\Pi}\boldsymbol{u}^{2}}\Big|_{\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_{u}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{u} + \dots - \left({}^{n}\boldsymbol{I} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{I} \right)\boldsymbol{P} = \boldsymbol{0}$$
(1.2.16)

ここに、*n*()は n-step での緒量を、*D*()は n-step ~ n+1-step 間での増分量を示す。上式を以下のように書き改める。

$$\frac{\P R}{\P u}\Big|_{u=n_u} Du + \frac{1}{2} Du^T \frac{\P^2 R}{\P u^2}\Big|_{u=n_u} Du + \dots = \left({}^n I + DI \right) P - R\Big|_{u=n_u}$$
(1.2.17)

ここで、n-step状態では内力ベクトルと荷重ベクトルは釣り合っているという条件、

$${}^{n}IP - R|_{u={}^{n}u} = 0$$
 (1.2.18)

を考慮し、さらに、線形解析同様変位増分ベクトルに対する高次項を無視すれば、次のような増分量に対する線 形方程式が得られる。

$$K_T Du = DIP \qquad (1.2.19a) \quad \Box \Box \Box \nabla K_T = \frac{\P R}{\P u} |_{u=u} \qquad (1.2.19b)$$

ここに、 K_T は接線剛性マトリクスと呼ばれるものである。ここで K_T の具体的な形を理解するために Fig.1.2.1 のモデルにおける K_T を求めてみる。式 (1.2.3)を式 (1.2.19b)に代入し、接線剛性を求めると、 $K_T = (2EA/l_0) \sin^2 Q + (2N/l) \cos^2 Q$ となる。これと線形解析の時に求めた線形剛性と比較すると、 $(2N/l) \cos^2 Q$ の 項が付加されている。これは、応力の存在により見かけ上の剛性が変化する効果を表し、通常「幾何剛性(マト リクス)」と呼ばれ、座屈現象などを引き起こす原因ともなる。

式(1.2.19)は n-step 状態から n+1-step 状態の増分間における第1近似値に対する平衡方程式である。非線形性が弱くかつ増分区間を十分に小さくした場合には、

 $^{n+1}u \cong^{n}u + Du$, $^{n+1}I \cong^{n}I + DI$, $^{n+1}G = R(^{n+1}u) - ^{n+1}IP \cong 0$ (1.2.20a,b,c)

が成り立ち、この式によって得られる近似解をそのまま増分間における解としても精度的に満足する結果が得られる場合もある。

しかしながら、非線形性が強い場合には累積誤差が大きくなるという点(Fig.1.2.6 参照)、どの程度の増分区間 をもって十分であるかという点、あるいは増分区間の短小化は計算時間を著しく増大させるという実用上の問題 などが存在する。そこで一般的には式(1.2.20)で得られた近似解を 真の解に近づける計算が行われている。これが収斂計算である。 なお、一般には上記の増分計算段階を一連の収斂計算における初 期計算として位置づける場合が多い。



Fig.1.2.6 第1近似のみによる結果

ニュートン・ラフソン法による反復計算 Iterative calculation by Newton-Raphson method この時の平衡方程式は、式(1.2)を反復計算の開始点でテイラー展開することによって得られる。

$$R\Big|_{u^{n+1}u_{(i)}} + \frac{\Re R}{\Re u}\Big|_{u^{n+1}u_{(i)}} dDu + \frac{1}{2} dDu^{T} \frac{\Re^{2} R}{\Re u^{2}}\Big|_{u^{n+1}u_{(i)}} dDu + \dots - \binom{n+1}{n+1} I_{(i)} + dDI \Big)P = 0$$
(2.1)

ここに、() $_{(i)}$ は i 反復計算段階における初期値、dD()は修正増分値を示す。これより、

$$K_{T(i)} dD u = dD l P - G_{(i)}$$
(2.2)

$$K_{T(i)} = \frac{\Re R}{\Re u}\Big|_{u=n+l_{u(i)}}, \qquad G_{(i)} = R\Big|_{u=n+l_{u(i)}} - {}^{n+1}I_{(i)}P \qquad (2.3)$$

ここに、 $K_{T(i)}$ はi反復計算段階における接線剛性マトリクスであり、Gは、本来、零になるべきベクトルであるが、高次項を無視したために生じる残差ベクトル(不平衡力ベクトル)である。また、n+1-stepにおける変位ベクトルおよび荷重パラメータは、修正増分値を用いて次のように更新される。

 ${}^{n+1}\boldsymbol{u}_{(i+1)} = {}^{n+1}\boldsymbol{u}_{(i)} + d\boldsymbol{D}\boldsymbol{u} \quad , \qquad {}^{n+1}\boldsymbol{I}_{(i+1)} = {}^{n+1}\boldsymbol{I}_{(i)} + d\boldsymbol{D}\boldsymbol{I} \tag{2.4}$

あるいは or

$$Du_{(i+1)} = Du_{(i)} + dDu$$
, $DI_{(i+1)} = DI_{(i)} + dDl$ (2.5)
各反復計算は、次の条件を満足した段階で得られた解が十分な精度に達したと判断し終了する。

 $\frac{\sqrt{\boldsymbol{G}_{(i)}^{T}\boldsymbol{G}_{(i)}}}{\sqrt{\left(\boldsymbol{R}\right|_{u=n+l_{w(i)}}\right)^{T}\left(\boldsymbol{R}\right|_{u=n+l_{w(i)}}\right)}} \leq Tolerance \quad , \qquad \qquad \frac{\sqrt{d\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}^{T}d\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}}}{\sqrt{\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}_{(i)}^{T}\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}_{(i)}}} \leq Tolerance$

(2.6a,b)

第1式は残差ベクトルのノルムと内力ベクトルのノルムの比による判定条件であり、第2式は変位修正 増分ベクトルのノルムと変位(増分)ベクトルのノルムの比による判定条件である。これ以外にもエネル ギーによる判定もある。通常は式(2.6a)を用いれば十分であるが、問題によっては内力ベクトルが計算途中 で零となる(無応力状態)場合もありえる。この時、式(2.6a)の分母が零となってしまい、式(2.6a)は意味 を失ってしまう。このような場合には式(2.6b)で収束精度を確認することになる。なお、上式中の Tolerance は収束精度の許容値であり通常 10-4 ~ 10-10 という値が用いられる。この値を大きくすると累積誤差が大き くなり、逆に必要以上に小さくすると反復回数が増え計算時間が増大するので注意しなければならない。