**第７回：平衡方程式の誘導**

**次のバネと剛体からなる構造の平衡方程式を求める。**

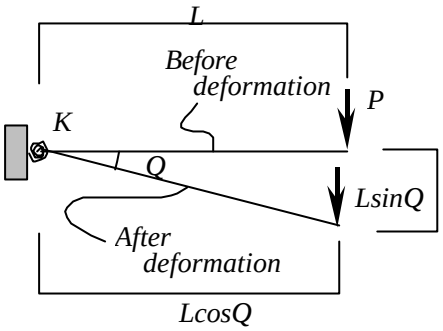



Fig.1 rigid bar and spring of rotation model in lateral force

**まず、構造体内部に蓄えられるエネルギーは、棒自身は剛体であるからバネのみに蓄えられる。**

$$P_e = \frac{1}{2}KQ^2$$

**外力のなす仕事は、**

$$W = PL\sin Q$$

**である。外力のなす仕事は内部に蓄えられるエネルギーと等しい（エネルギー保存の法則）から、**

$$\frac{1}{2}KQ^2 - PL\sin Q = 0$$

**となる。ここで、Q で変分すると、**

$$dQ\left(KQ - PL\cos Q\right) = 0$$

**となる。これは外力によるモーメントとバネに発生するモーメントが釣り合っていることを意味する式となっている。**

**これを次のように考えることもできる。すなわち、ある釣り合い点から仮想の変位 $dQ$ を考える。**

$$\frac{1}{2}K(Q+dQ)^2 - PL\sin(Q+dQ) = \frac{1}{2}K\left(Q^2 + 2QdQ + dQ^2\right) - \left(PL\sin Q\cos dQ + \cos Q\sin dQ\right) = 0$$

**ここで仮想変位は小さいとすれば、その高次項は省略することができるので、**

$$\frac{1}{2}K\left(Q^2 + 2QdQ\right) - PL\left(\sin Q + \cos QdQ\right) = 0$$

**となり、結局仮想変位による仕事の増加およびエネルギーの増加は、**

$$KQdQ - PL\cos QdQ = 0$$

**となる。これより、**

$$dQ\left(KQ - PL\cos Q\right) = 0$$

**なる関係が得られる。つまり仮想仕事の原理とエネルギー停留原理とは同じであることが解る。**

**ここで、構造力学で習った仮想仕事の原理を利用した変位の算出法について考えてみる。この方法は、任意の梁に所定の荷重 P により応力 M が発生しているものとし、このとき知りたい点に仮想の荷重 X を作用させた時の曲げモーメントを用いて変位を計算するというものであった。**

**これは次のように証明される。まず手順とは逆に $X$ が作用しているものとする。**

$$\frac{1}{2}\int_L \frac{dM^2(s)}{EI}ds - Xdu(s_x) = 0$$ sx は荷重作用点における荷重方向変位

これにさらに実際に作用している荷重 P を考えると、

$$\frac{1}{2}\int_L \frac{(M+dM)^2}{EI}ds - \int_L pudS - X(u+du) = 0$$

$$\frac{1}{2}\int_L \frac{M^2}{EI}ds + \int_L \frac{MdM}{EI}ds + \frac{1}{2}\int_L \frac{dM^2}{EI}ds - \int_L pudS - X(u+du) = 0$$

ここで、

$$\frac{1}{2}\int_L \frac{M^2}{EI}ds - \int_L pudS = 0$$ および $$\frac{1}{2}\int_L \frac{dM^2(s)}{EI}ds - Xdu(s_x) = 0$$

であることを考慮すれば、

$$\int_L \frac{MdM}{EI}ds - Xu = 0$$

となり、構造力学で習った式が得られる。正確には上式は曲げモーメント（応力）で記述していることからコンプリメンタリ仮想仕事の原理と呼ぶ。

以上のことから、解るようにエネルギーの収支を適当な変数で表すことができたならば、その変数で微分することにより、その系の平衡方程式が得られる。これをエネルギー停留原理と呼ぶ。

さて、ここで再度バネと剛体からなるモデルに戻って平衡方程式の意味を考える。このモデルの平衡方程式は次のように表された。

$$(KQ - PL\cos Q) = 0$$

これは明らかに$Q$に関する非線形方程式となっている。つまり$Q$の 1 次式ではない。ではこの式から得られる P と$Q$の関係はどのようになるのか具体的に$Q$に数値を入れて P を求めてみる。

| $Q$ | P |
|---|---|
| 0.0 | 0.0 |
| π/6(0.524) | 0.60 |
| π/4(0.785) | 1.11 |
| π/3(1.047) | 2.09 |
| π/2(1.571) | ∞ |

となり、Q が大きくなると P は急激に大きくなり、π/2 で∞となる。これはモデルからも明らかであり、90 度まで変形すると如何なる大きさの力を加えようともこれ以上このモデルは変形することはない。

このように形状が変化することにより、剛性が変化する問題のことを幾何学的非線形問題と呼ぶ。構造物の崩壊挙動を追跡するためにはこのような解析が必要となる。

この問題を構造力学で習ったような微小変位問題と仮定すると、次のように表現することができる。

$$(KQ - PL\cos Q) \cong KQ - PL = 0$$

となり、誰でも理解できる式となる。これは微小変形理論と呼ばれる。

不安定現象：先のモデルに鉛直力を加えることとする。

まず、構造体内部に蓄えられるエネルギーは、先と全く同様である。

$$P_e = \frac{1}{2}KQ^2$$

外力のなす仕事は、

$$W = QL\sin Q + PL(1-\cos Q)$$

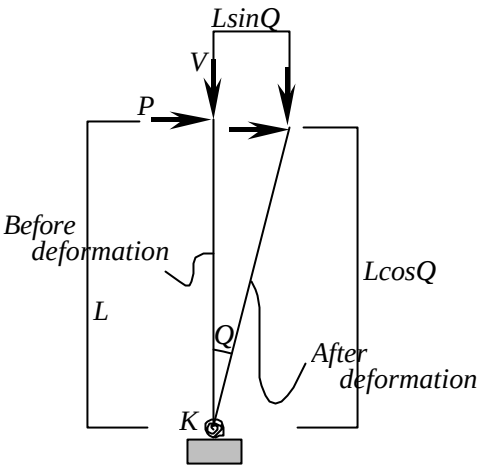
である。外力のなす仕事は内部に蓄えられるエネルギーと等しい（エネルギー保存の法則）から、

$$\frac{1}{2}KQ^2 - QL\sin Q - PL(1-\cos Q) = 0$$

となる。ここで、$Q$で変分すると、

$$dQ(KQ - QL\cos Q - PL\sin Q) = 0$$

となる。これもまた外力によるモーメントとバネに発生するモーメントが釣り合っていることを意味する式となっている。




今一定の軸力が作用し、また Q は比較的微小であるものとすれば、

$$(K-PL)Q = QL$$

となる。この PL は見かけ上の剛性を小さくするあるいは引張が作用する場合には逆に剛性を大きくする働きがあり、これは幾何剛性と呼ばれるものである。ギターの弦などがこれに相当する。

今度は Q は一定で P が徐々に大きくなるものとする。P が P=K/L となった状態を考えると、上式中の$Q$に掛かる剛性がゼロとなり、不安定構造物となる。これを座屈と呼ぶ。