第６回： Bernoulli の仮定に基づく弾性梁要素

ここでは、微小相対変位 $\{u_j(=\tilde{u}), a_j(=\tilde{a}), b_i, g_i, b_j, g_j\}$ **についてのみ考慮する。 梁内部の変位場を中立軸にてマクローリン展開し１次の項まで考慮すると、次のようになる。**

$$u(r,s,t)=u_0(r)+\left.\frac{\partial u}{\partial s}\right|_{s=0} s+\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} t, \quad v(r,s,t)=v_0(r)+\left.\frac{\partial v}{\partial s}\right|_{s=0} s+\left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0} t, \quad w(r,s,t)=w_0(r)+\left.\frac{\partial w}{\partial s}\right|_{s=0} s+\left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=0} t \tag{1.1}$$

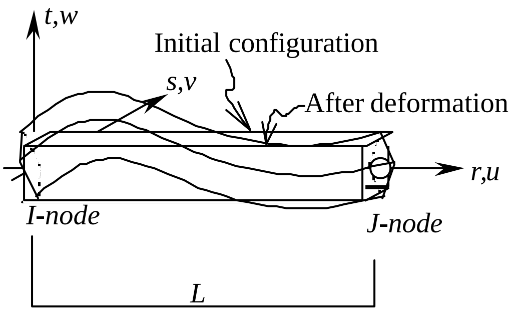

Fig.1.1 Local coordinate system

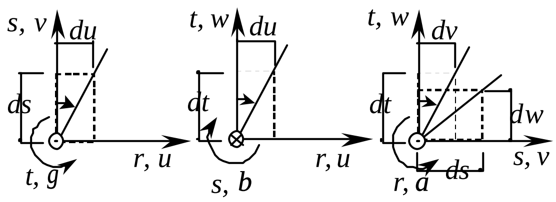

Fig.1.2 Relation between rotations and derivatives

ここで、簡略化のために平面保持および法線保持の仮定を導入すると（Fig.1.2 **参照**）**、**

$$\left.\frac{\partial u}{\partial s}\right|_{s=0}=-g, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=b, \quad \left.\frac{\partial v}{\partial s}\right|_{s=0}=0, \quad \left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0}=-a, \quad \left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=0}=0, \quad \left.\frac{\partial w}{\partial s}\right|_{s=0}=a \tag{1.2}$$

となる。ここに、a, b, g**は** r, s, t**軸回りの回転を表し、反時計回りを正とする。これらを式**(1.1)**に代入すれば、**

$$u(r,s,t)=u_0(r)-g(r)s+b(r)t, \quad v(r,s,t)=v_0(r)-a(r)t, \quad w(r,s,t)=w_0(r)+a(r)s \tag{1.3}$$

となる。u_0, v_0, w_0, a **について、有限要素法の手順に従い、以下のように変位関数を設定する。**

$$u_0(r)=a+br, \quad v_0(r)=c+dr+er^2+fr^3, \quad w_0(r)=g+hr+ir^2+jr^3, \quad a(r)=k+lr \tag{1.4}$$

ここに、a-l **は一般化変位である。これを境界条件を代入して節点変位表示に切り替える。**

$$u_0(0)=a=0, \qquad u_0(L)=a+bL=\tilde{u}(=u_j)$$

$$b=\frac{\tilde{u}}{L}$$

$$v_0(0)=c=0, \qquad v_0(L)=c+dL+eL^2+fL^3=0 \qquad eL+fL^2=-\tilde{g}_i$$

$$e=-\frac{1}{L}\left(\tilde{g}_j+2\tilde{g}_i\right)$$

$$\left.\frac{dv_0}{dr}\right|_{r=0}=d=\tilde{g}_i, \qquad \left.\frac{dv_0}{dr}\right|_{r=L}=d+2eL+3fL^2=\tilde{g}_j \qquad 2eL+3fL^2=\tilde{g}_j-\tilde{g}_i \qquad f=\frac{1}{L^2}\left(\tilde{g}_j+\tilde{g}_i\right)$$

$$w_0(0)=g=0, \qquad w_0(L)=g+hL+iL^2+jL^3=0 \qquad iL+jL^2=\tilde{b}_i \qquad i=\frac{1}{L}\left(\tilde{b}_j+2\tilde{b}_i\right)$$

$$\left.\frac{dw_0}{dr}\right|_{r=0}=h=-\tilde{b}_i, \qquad \left.\frac{dw_0}{dr}\right|_{r=L}=h+2iL+3jL^2=-\tilde{b}_j \qquad 2iL+3jL^2=-\tilde{b}_j+\tilde{b}_i$$

$$j=-\frac{1}{L^2}\left(\tilde{b}_j+\tilde{b}_i\right)$$

$$a(0)=k=0 \qquad a(L)=k+lL=a_j=\tilde{a} \qquad l=\frac{1}{L}\tilde{a}$$

したがって、

$$u_0(r)=\frac{r}{L}\tilde{u}\ , \quad v_0(r)=L\left\{\left(\frac{r}{L}-2\frac{r^2}{L^2}+\frac{r^3}{L^3}\right)\tilde{g}_i+\left(-\frac{r^2}{L^2}+\frac{r^3}{L^3}\right)\tilde{g}_j\right\}, \quad w_0(r)=L\left\{\left(-\frac{r}{L}+2\frac{r^2}{L^2}-\frac{r^3}{L^3}\right)\tilde{b}_i+\left(\frac{r^2}{L^2}-\frac{r^3}{L^3}\right)\tilde{b}_j\right\}$$

$$g(r)=\left\{\left(1-4\frac{r}{L}+3\frac{r^2}{L^2}\right)\tilde{g}_i+\left(-2\frac{r}{L}+3\frac{r^2}{L^2}\right)\tilde{g}_j\right\}, \quad b(r)=\left\{\left(1-4\frac{r}{L}+3\frac{r^2}{L^2}\right)\tilde{b}_i+\left(-2\frac{r}{L}+3\frac{r^2}{L^2}\right)\tilde{b}_j\right\} \qquad a(r)=\frac{r}{L}\tilde{a}$$

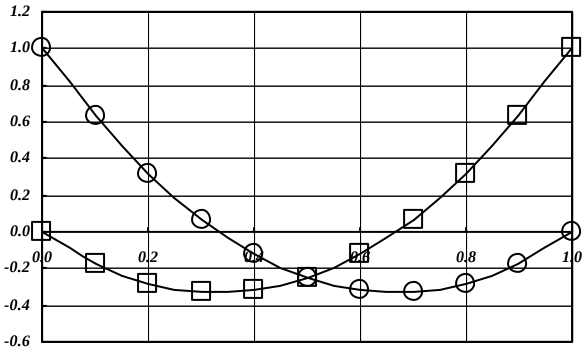

Fig.1.3 Displacement function for b_i (○), b_j (□)

一方、垂直応力度は、$e_{rr}(r,s,t)=\dfrac{\partial u}{\partial r}$ であるから、これに式(1.3)および(1.4)を代入する。

$$\begin{aligned}
e_{rr}(r,s,t)&=\frac{\partial}{\partial r}\{u_0(r)-g(r)s+b(r)t\}\\
&=\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{r}{L}\tilde{u}-\left\{\left(1-4\frac{r}{L}+3\frac{r^2}{L^2}\right)\tilde{g}_i+\left(-2\frac{r}{L}+3\frac{r^2}{L^2}\right)\tilde{g}_j\right\}s+\left\{\left(1-4\frac{r}{L}+3\frac{r^2}{L^2}\right)\tilde{b}_i+\left(-2\frac{r}{L}+3\frac{r^2}{L^2}\right)\tilde{b}_j\right\}t\right]\\
&=\frac{1}{L}\tilde{u}-\left(-4\frac{1}{L}+6\frac{r}{L^2}\right)s\tilde{g}_i+\left(-4\frac{1}{L}+6\frac{r}{L^2}\right)t\tilde{b}_i-\left(-2\frac{1}{L}+6\frac{r}{L^2}\right)s\tilde{g}_j+\left(-2\frac{1}{L}+6\frac{r}{L^2}\right)t\tilde{b}_j
\end{aligned}$$

(1.6)

次に、以上の関係を用いて平衡方程式を求める。なお、せん断変形は無視するものとする。弾性においては、応力度は $s_{rr}=Ee_{rr}$ として求められるから、ひずみエネルギーは次のように求められる。

$$W=\frac{1}{2}\int_V Ee_{rr}{}^2dv \tag{1.7}$$

これに式(1.6)を代入する。

$$W=\frac{1}{2}\int_V E\left\{\frac{1}{L}\tilde{u}-\left(-4\frac{1}{L}+6\frac{r}{L^2}\right)s\tilde{g}_i+\left(-4\frac{1}{L}+6\frac{r}{L^2}\right)t\tilde{b}_i-\left(-2\frac{1}{L}+6\frac{r}{L^2}\right)s\tilde{g}_j+\left(-2\frac{1}{L}+6\frac{r}{L^2}\right)t\tilde{b}_j\right\}^2dv \tag{1.8}$$

一例として、具体的に式展開すると、

$$W_{uu}=\frac{1}{2}\int_V E\left\{\frac{1}{L}\tilde{u}\right\}^2dv=\frac{1}{2}\frac{EA}{L}\tilde{u}^2$$

$$W_{b_i b_i} = \frac{1}{2}\int_V E\left\{\left(-4\frac{1}{L}+6\frac{r}{L^2}\right)t\tilde{b}_i\right\}^2 dv = \frac{1}{2}\int_L\int_A E\left\{\left(-4\frac{1}{L}+6\frac{r}{L^2}\right)^2 t^2\tilde{b}_i{}^2\right\}dAdr = \frac{1}{2}\int_L EI_s\left\{\left(-4\frac{1}{L}+6\frac{r}{L^2}\right)^2 \tilde{b}_i{}^2\right\}dr$$

$$= \frac{1}{2}EI_s\left\{\left(16\frac{L}{L^2}-24\frac{L^2}{L^3}+12\frac{L^3}{L^4}\right)\tilde{b}_i{}^2\right\} = \frac{1}{2}\frac{4EI_s}{L}\tilde{b}_i{}^2$$

where $A = \int_A dA$, $I_s = \int_A t^2 dA$ is an area and a moment of inertia of cross section respectively.

同様に、他の項についても計算することにより、結局、ひずみエネルギーは次のように求められる。

$$W = \frac{1}{2}\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} \tag{1.9}$$

ここに、$()^T$ は転置を表し、$\boldsymbol{u}$ は相対節点変位ベクトル $\boldsymbol{u} = \langle \tilde{u} \quad a_i \quad b_i \quad g_i \quad a_j \quad b_j \quad g_j \rangle^T$ である。ここで、エネルギー保存則を考えると、

$$P = \frac{1}{2}\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{f} = 0 \tag{1.10}$$

となる。ここに、 $\boldsymbol{f} = \langle n \quad m_{ri} \quad m_{si} \quad m_{ti} \quad m_{rj} \quad m_{sj} \quad m_{tj} \rangle^T$ は節点に作用する外力ベクトルである。この式は、外力のなす仕事が、梁内部に蓄えられるひずみエネルギーに等しいことを意味する。さらに、ポテンシャルエネルギーの停留原理を用いることにより、平衡方程式が得られる。

$$\frac{\partial P}{\partial \boldsymbol{u}} = \boldsymbol{K}\boldsymbol{u} - \boldsymbol{f} = \boldsymbol{0} \tag{1.11}$$

せん断変形の影響　Effect of shear deformation

これは、通常の弾性マトリクス法においては、次のように求められる。簡略化のため平面問題として記述する。I-節点、J-節点におけるモーメントと回転角の関係は次のように表された。

$$\begin{Bmatrix} M_i \\ M_j \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} q_i \\ q_j \end{Bmatrix},\quad \begin{Bmatrix} q_i \\ q_j \end{Bmatrix} = \frac{L}{12EI}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} M_i \\ M_j \end{Bmatrix} \qquad (3.1)$$

さらに、次式が成り立たなければならない。

$$Q = -\frac{dM}{dr} = -\frac{M_i + M_j}{L},\quad Q = GA_s j \qquad (3.2)$$

なお、せん断変形は Fig.3.1 に示すような角度として評価される。今、せん断変形を含む端部回転角を$\tilde{q}_i$，$\tilde{q}_j$にて表すこととする。すなわち、

$$\tilde{q}_i = q_i + j\ ,\quad \tilde{q}_j = q_j + j \qquad (3.3)$$

式(3.3)に式(3.1),(3.2)を代入する。

$$\begin{Bmatrix} \tilde{q}_i \\ \tilde{q}_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_i \\ q_j \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} j \\ j \end{Bmatrix} = \frac{L}{12EI}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} M_i \\ M_j \end{Bmatrix} + \frac{1}{GA_s L}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} M_i \\ M_j \end{Bmatrix}$$

なる関係が得られ、これを ***M*** について解く。

$$\begin{Bmatrix} M_i \\ M_j \end{Bmatrix} = \left(\frac{L}{12EI}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} + \frac{1}{GA_s L}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{Bmatrix} \tilde{q}_i \\ \tilde{q}_j \end{Bmatrix}$$

この式中の係数マトリクスを取り出す。

$$\left(\frac{L}{12EI}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} + \frac{1}{GA_s L}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right)^{-1} = \left(\frac{L}{12EI}\left\{\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} + \frac{12EI}{GA_s L^2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right\}\right)^{-1}$$

ここで、$f = \dfrac{12EI}{GA_s L^2}$ とおき、さらに計算すると、

$$\left(\frac{L}{12EI}\left\{\begin{bmatrix} 4+f & -2+f \\ -2+f & 4+f \end{bmatrix}\right\}\right)^{-1} = \frac{12EI}{L}\frac{1}{(4+f)^2-(2-f)^2}\begin{bmatrix} 4+f & 2-f \\ 2-f & 4+f \end{bmatrix} = \frac{EI}{L}\frac{1}{1+f}\begin{bmatrix} 4+f & 2-f \\ 2-f & 4+f \end{bmatrix}$$

$$= \frac{EI}{L}\begin{bmatrix} \dfrac{4+f}{1+f} & \dfrac{2-f}{1+f} \\ \dfrac{2-f}{1+f} & \dfrac{4+f}{1+f} \end{bmatrix}$$

となる。これがせん断変形を考慮した弾性剛性マトリクスである。この考え方は、曲げが求められると、せん断力が得られる。せん断力が解ればせん断変形が求められる。という応力法に基づいている。

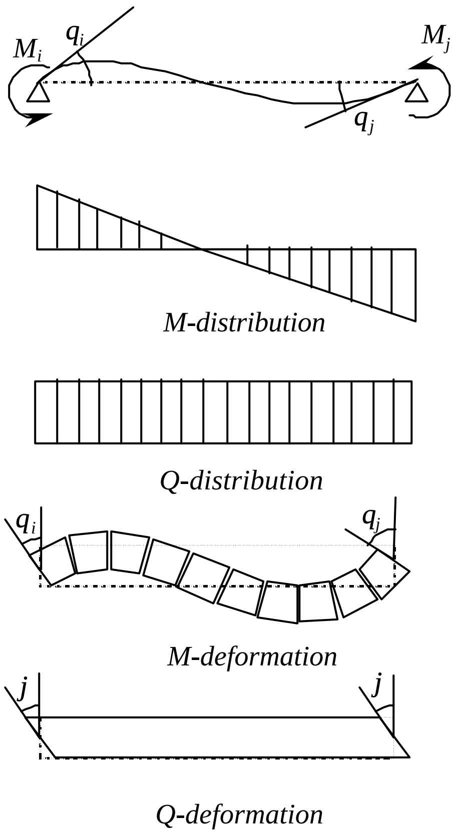

Fig. 3.1　2-dimensional problem