第５回：応力について　　2nd パオラーキルヒホッフ～コーシー応力

構成則について　3 次元～平面応力場～1 次元応力場

レポート①：円筒座標系における基底ベクトル、計量テンソル、クリトッフェル記号を求めよ。また円筒座標系におけるひずみ変位関係式を求めよ。

応力、応力ひずみ関係式について

実際に幾何学的な非線形性を考慮した場合には応力の取り扱いにも注意しなければならない。ただし、この点は説明が極めて抽象的なものとなるので割愛する。

線形弾性における応力ひずみ関係式はテンソル表記によれば次のように表すことができる。

$$s^{ij} = E^{ijkl} e_{kl} \qquad \text{(s.1)}$$

これは一般化フックの法則として呼ばれるものである。今 3 次元の応力、ひずみ成分を考えると、弾性係数テンソルは 34 で 81 個の成分を有する。ただし、応力、ひずみは対称であることを考えると、独立な成分は 36 個となる。また次のように考えると、さらに独立な成分を減らすことができる。

今応力がひずみの関数として定義されるものとする。

$$s^{ij} \equiv s^{ij}\left(e_{kl}\right)$$

この応力が外力と釣り合っているものとして、この段階からさらに微小な仮想変位が加わったときの仮想仕事は物体内部にて行われる仕事の増加と同じである。

$$\int_W F^i du_i dV + \int_{\partial W} T^i du_i dS = \int_W s^{ij} de_{ij} dV$$

右辺は物体内部に蓄えられるひずみエネルギーWの増加とも言えるもので、これを

$$\int_W dW dV = \int_W s^{ij} de_{ij} dV$$

と表す。これは物体内部の如何なる領域においても成り立つべきものであるから、

$$dW = s^{ij} de_{ij}$$

となり、またひずみエネルギーWはひずみのみの関数とすれば、

$$dW = \frac{\partial W}{\partial e_{ij}} de_{ij}$$

と表すことができる。上記の両式を比較することにより、

$$s^{ij} = \frac{\partial W}{\partial e_{ij}}$$

という結論が得られる。これが Green の弾性構成式である。

ここで、ひずみエネルギー密度 W をひずみのべき級数で展開しその２次項まで考えて次式のように示す。

$$W = a_0 + a^{ij} e_{ij} + a^{ijkl} e_{ij} e_{kl}$$

これを Green の弾性構成式に代入すると、

$$s^{ij} = \frac{\partial W}{\partial e_{ij}} = a^{ij} + \left(a^{ijkl} + a^{klij}\right) e_{kl}$$

となる。ここで無ひずみ状態では応力が零 $a^{ij} = 0$ であるとすれば、$s^{ij} = \left(a^{ijkl} + a^{klij}\right) e_{kl} \to s^{ij} = E^{ijkl} e_{kl}$ であるから、

$$E^{ijkl} = a^{ijkl} + a^{klij} \qquad ? \qquad E^{ijkl} = E^{klij}$$

となり、弾性係数テンソルは(ij),(kl)に対して対称であることが解る。もともと(ij)および(kl)については応力

および ひずみは対称であるから、独立な弾性係数テンソルの項は 21 個となる。すなわち、

$$\begin{Bmatrix} s^{xx} \\ s^{yy} \\ s^{zz} \\ s^{xy} \\ s^{yz} \\ s^{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E^{xxxx} & E^{xxyy} & E^{xxzz} & E^{xxxy} & E^{xxyz} & E^{xxzx} \\ & E^{yyyy} & E^{yyzz} & E^{yyxy} & E^{yyyz} & E^{yyzx} \\ & & E^{zzzz} & E^{zzxy} & E^{zzyz} & E^{zzzx} \\ & & & E^{xyxy} & E^{xyyz} & E^{xyzx} \\ & & & & E^{yzyz} & E^{yzzx} \\ & & & & & E^{zxzx} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ e_{zz} \\ e_{xy} \\ e_{yz} \\ e_{zx} \end{Bmatrix}$$

となる。さらに独立な成分を減じるためには等方性を導入する。これ以上の式展開はあまり有益とは思えないので、結論のみを示すと、

$$\begin{Bmatrix} s^{xx} \\ s^{yy} \\ s^{zz} \\ s^{xy} \\ s^{yz} \\ s^{zx} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+n)(1-2n)} \begin{bmatrix} 1-n & n & n & 0 & 0 & 0 \\ & 1-n & n & 0 & 0 & 0 \\ & & 1-n & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1-2n}{2} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1-2n}{2} & 0 \\ & & & & & \frac{1-2n}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ e_{zz} \\ e_{xy}+e_{yx} \\ e_{yz}+e_{zy} \\ e_{zx}+e_{xz} \end{Bmatrix}$$

となり、独立な成分は E,n のみとなる。

平面応力場

　ここで、板やシェルなどを考えると、板厚は他の寸法（例えばスパン）などに比し極めて小さいことから板厚方向の応力 s^{zz} は他の成分に比べてきわめて小さくなる。このため通常は平面応力場というものが仮定されることが多い。この場合には、上記の式の第 3 式に $s^{zz}=0$ を代入し、

$$e_{zz} = -\frac{n}{1-n}e_{xx} - \frac{n}{1-n}e_{yy}$$

なる関係を求め、これを第 1,2 式に代入することにより、zz 成分を消去した次式が得られる。

$$\begin{Bmatrix} s^{xx} \\ s^{yy} \\ - \\ s^{xy} \\ s^{yz} \\ s^{zx} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-n^2} \begin{bmatrix} 1 & n & - & 0 & 0 & 0 \\ n & 1 & - & 0 & 0 & 0 \\ - & - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & - & \frac{1-n}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & - & 0 & \frac{1-n}{2} & 0 \\ 0 & 0 & - & 0 & 0 & \frac{1-n}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ - \\ e_{xy}+e_{yx} \\ e_{yz}+e_{zy} \\ e_{zx}+e_{xz} \end{Bmatrix}$$

　このようにすることにより、板厚方向のひずみ成分も除去され、解析する際の自由度を減じることが可能となる。

１軸応力場

　さらに、梁などを考えると、断面の２方向に関する応力は材軸方向と比し極めて小さくなる $s^{yy}=s^{zz}=0$ 。したがって、上式から s^{yy} を除去すると、

$$\begin{Bmatrix} s^{xx} \\ - \\ - \\ s^{xy} \\ s^{yz} \\ s^{zx} \end{Bmatrix} = E \begin{bmatrix} 1 & - & - & 0 & 0 & 0 \\ - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - \\ 0 & - & - & \dfrac{1}{2(1+n)} & 0 & 0 \\ 0 & - & - & 0 & \dfrac{1}{2(1+n)} & 0 \\ 0 & - & - & 0 & 0 & \dfrac{1}{2(1+n)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_{xx} \\ - \\ - \\ e_{xy} + e_{yx} \\ e_{yz} + e_{zy} \\ e_{zx} + e_{xz} \end{Bmatrix}$$

となる。これはよく知られた $s = Ee$ という関係に一致する。このように考えることにより１次元問題として捉えることが可能となる。

　ただし、上記の２つのいずれもひずみが零ではないことに注意する。あくまで応力が零と仮定しているだけである。

平面ひずみ場

　ここで対象となるのは、ダムなどのように断面に比べて奥行き長さが大きい場合には、奥行き方向のひずみが零であると仮定する。この場合には構成方程式は３次元の場合と同じである。

　以上、デカルト座標系に関する記述を行ってきたが、これには、通常我々が知りうる構成則（応力・ひずみ関係式）は、応力、ひずみともにデカルト座標系成分で表した場合である、という理由がある。また工学的な観点からも例えば斜交座標系におけるせん断ひずみ（あるいは応力）は意味を持たない。したがって実際に曲面座標系を用いたとしても実際の解析においてはテンソル成分から物理成分への変換する時に局所的なデカルト座標系に対して行うべきであり、このことからも構成方程式はデカルト座標系成分に対するものだけを誘導しておけば十分である。