

第4回 ひずみ

物理的な成分への変換

物理的な成分への変換は原則次のように考える。

変位に関して；

$$\mathbf{u} = u^m \mathbf{g}_m = u^m \left(\sqrt{g_{mm}} \frac{\mathbf{g}_m}{\sqrt{g_{mm}}} \right) = u^m \left(\sqrt{g_{mm}} \tilde{\mathbf{i}}_m \right) = \left(\sqrt{g_{mm}} u^m \right) \tilde{\mathbf{i}}_m \text{ より、 } \tilde{u}^m = \sqrt{g_{mm}} u^m$$

同様に、

$$\mathbf{u} = u_m \mathbf{g}^m = u_m \left(\sqrt{g^{mm}} \frac{\mathbf{g}^m}{\sqrt{g^{mm}}} \right) = u_m \left(\sqrt{g^{mm}} \tilde{\mathbf{i}}^m \right) = \left(\sqrt{g^{mm}} u_m \right) \tilde{\mathbf{i}}^m \text{ より、 } \tilde{u}_m = \sqrt{g^{mm}} u_m$$

であるから、物理的な成分は、

$$\tilde{u}^m = \sqrt{g_{mm}} u^m, \quad \tilde{u}_m = \sqrt{g^{mm}} u_m, \quad \text{ただし } m \text{ について総和をとらない。}$$

と表される。

ひずみに関して；上記の記述より、 $d\tilde{x}^m = \sqrt{g_{mm}} dx^m$ であることは明らかである。

$$2e_{ij} dx^i dx^j = 2e_{ij} \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}} d\tilde{x}^i \frac{1}{\sqrt{g_{jj}}} d\tilde{x}^j = 2 \left(\frac{1}{\sqrt{g_{ii}} \sqrt{g_{jj}}} e_{ij} \right) d\tilde{x}^i d\tilde{x}^j = \tilde{e}_{ij} d\tilde{x}^i d\tilde{x}^j$$

であるから、物理成分は、

$$\tilde{e}_{ij} = \frac{1}{\sqrt{g_{ii}} \sqrt{g_{jj}}} e_{ij}, \quad \text{ただし } ij \text{ について総和をとらない。}$$

と表される。

以上の変換則を別の角度から見てみると、当該座標系から当該座標系と方向が同じで単位の大きさを有するベクトルを基底とする座標系への変換であることは明らかである。しかしながら実際の工学上の解析においては、「後述する構成則として既知であるのはデカルト座標系に関するものであること」および「仮に当該座標系が斜交座標系であっても斜交座標系におけるせん断ひずみなどは工学的な意味を有さないこと」から、通常は参照点において適当なデカルト座標系を設定し、その座標系成分を求めることにより物理的な成分としている。このような場合の変換則は既に座標変換のところで述べたようにヤコビアンマトリクスを用いて計算すればよい。したがって、

$$\hat{u}^m = b_n^m u^n, \quad \hat{u}_m = b_m^n u_n, \quad \hat{e}_{ij} = b_i^k b_j^l e_{kl} \quad \text{ここに、} \quad b_i^k = \frac{\partial x^k}{\partial \hat{x}^i}$$

となる。

問題 極座標系(r, q)について具体的に求めてみる。当然ながらテンソル表示によるひずみ変位関係式は上式そのものである。

$$2e_{ij} = u_i|_j + u_j|_i + g_{mn} u^m|_i u^n|_j = u_i|_j + u_j|_i + u^m|_i u_n|_j$$

これを極座標系(r, q)に限定することによって通常工学において用いられる物理的な表現を求める。

まず、準備計算として、基底ベクトル、計量テンソル、クリストフェル記号を求めておく。なお、以下の表示において $x^1 \equiv r$, $x^2 \equiv q$ である。

位置ベクトル： $\mathbf{p} = x^1 \cos x^2 \mathbf{i}_x + x^1 \sin x^2 \mathbf{i}_y$

基底ベクトル： $\mathbf{g}_1 = \frac{\mathbf{p}}{x^1} = \cos x^2 \mathbf{i}_x + \sin x^2 \mathbf{i}_y$, $\mathbf{g}_2 = \frac{\mathbf{p}}{x^2} = -x^1 \sin x^2 \mathbf{i}_x + x^1 \cos x^2 \mathbf{i}_y$

計量テンソル： $g_{11} = \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}_1 = (\cos x^2 \mathbf{i}_x + \sin x^2 \mathbf{i}_y) \cdot (\cos x^2 \mathbf{i}_x + \sin x^2 \mathbf{i}_y) = \cos^2 x^2 + \sin^2 x^2 = 1$

$$g_{22} = \mathbf{g}_2 \cdot \mathbf{g}_2 = (-x^1 \sin x^2 \mathbf{i}_x + x^1 \cos x^2 \mathbf{i}_y) \cdot (-x^1 \sin x^2 \mathbf{i}_x + x^1 \cos x^2 \mathbf{i}_y) = x^1 x^1$$

$$g_{ij} = 0 \quad \text{at} \quad i \neq j$$

$$g^{11} = 1, \quad g^{22} = \frac{1}{x^1 x^1}, \quad g_{ij} = 0 \quad \text{at} \quad i \neq j$$

クリストフェル記号： $2G_{ijk} = g_{jk,i} + g_{ki,j} - g_{ij,k}$

$$2G_{111} = g_{11,1} + g_{11,1} - g_{11,1} = 0, \quad 2G_{112} = g_{12,1} + g_{21,1} - g_{11,2} = 0, \quad 2G_{121} = g_{21,1} + g_{11,2} - g_{12,1} = 0$$

$$2G_{211} = g_{11,2} + g_{12,1} - g_{21,1} = 0, \quad 2G_{122} = g_{22,1} + g_{21,1} - g_{12,2} = 2x^1, \quad 2G_{212} = g_{12,2} + g_{22,1} - g_{21,2} = 2x^1$$

$$2G_{221} = g_{21,1} + g_{12,2} - g_{22,1} = -2x^1, \quad 2G_{222} = g_{22,2} + g_{22,2} - g_{22,2} = 0$$

$$G_{ij}^k = G_{ijl} g^{lk} \text{ より、}$$

$$G_{11}^1 = G_{111} g^{11} + G_{112} g^{21} = 0, \quad G_{11}^2 = G_{111} g^{12} + G_{112} g^{22} = 0, \quad G_{12}^1 = G_{121} g^{11} + G_{122} g^{21} = 0$$

$$G_{21}^1 = G_{211} g^{11} + G_{212} g^{21} = 0, \quad G_{12}^2 = G_{121} g^{12} + G_{122} g^{22} = 1/x^1, \quad G_{21}^2 = G_{211} g^{12} + G_{212} g^{22} = 1/x^1$$

$$G_{22}^1 = G_{221} g^{11} + G_{222} g^{21} = -x^1, \quad G_{22}^2 = G_{221} g^{12} + G_{222} g^{22} = 0$$

以上の結果から、ひずみおよび変位の物理的成分間の関係式を求めよ。

$$\begin{aligned}
2e_{11} &= u_1|_1 + u_1|_1 + u^i|_1 u_i|_1 = 2(u_{1,1} - G_{11}^m u_m) + (u^i{}_{,1} + G_{11}^i u^l)(u_{i,1} - G_{i1}^k u_k) \\
&= 2(u_{1,1} - G_{11}^m u_m) + (u^1{}_{,1} + G_{11}^1 u^l)(u_{1,1} - G_{11}^k u_k) + (u^2{}_{,1} + G_{11}^2 u^l)(u_{2,1} - G_{21}^k u_k) \\
&= 2u_{1,1} + u^1{}_{,1} u_{1,1} + \left(u^2{}_{,1} + \frac{1}{x^1} u^2\right) \left(u_{2,1} - \frac{1}{x^1} u_2\right) \\
2e_{22} &= u_2|_2 + u_2|_2 + u^i|_2 u_i|_2 = 2(u_{2,2} - G_{22}^m u_m) + (u^i{}_{,2} + G_{21}^i u^l)(u_{i,2} - G_{i2}^k u_k) \\
&= 2(u_{2,2} - G_{22}^m u_m) + (u^1{}_{,2} + G_{21}^1 u^l)(u_{1,2} - G_{12}^k u_k) + (u^2{}_{,2} + G_{21}^2 u^l)(u_{2,2} - G_{22}^k u_k) \\
&= 2(u_{2,2} - x^1 u_1) + (u^1{}_{,2} - x^1 u^2)(u_{1,2} - 1/x^1 u_2) + (u^2{}_{,2} + 1/x^1 u^1)(u_{2,2} + x^1 u_1) \\
2e_{12} &= u_1|_2 + u_2|_1 + u^i|_1 u_i|_2 = (u_{1,2} - G_{12}^m u_m) + (u_{2,1} - G_{21}^m u_m) + (u^i{}_{,1} + G_{11}^i u^l)(u_{i,2} - G_{i2}^k u_k) \\
&= (u_{1,2} - G_{12}^m u_m) + (u_{2,1} - G_{21}^m u_m) + (u^1{}_{,1} + G_{11}^1 u^l)(u_{1,2} - G_{12}^k u_k) + (u^2{}_{,1} + G_{11}^2 u^l)(u_{2,2} - G_{22}^k u_k) \\
&= u_{1,2} + u_{2,1} - 1/x^1 u_2 - 1/x^1 u_2 + u^1{}_{,1}(u_{1,2} - 1/x^1 u_2) + (u^2{}_{,1} + 1/x^1 u^2)(u_{2,2} + x^1 u_1) \\
2G_{111} &= g_{11,1} + g_{11,1} - g_{11,1} = 0, \quad 2G_{112} = g_{12,1} + g_{21,1} - g_{11,2} = 0, \quad 2G_{121} = g_{21,1} + g_{11,2} - g_{12,1} = 0 \\
2G_{211} &= g_{11,2} + g_{12,1} - g_{21,1} = 0, \quad 2G_{122} = g_{22,1} + g_{21,1} - g_{12,2} = 2x^1, \quad 2G_{212} = g_{12,2} + g_{22,1} - g_{21,2} = 2x^1 \\
2G_{221} &= g_{21,1} + g_{12,2} - g_{22,1} = -2x^1, \quad 2G_{222} = g_{22,2} + g_{22,2} - g_{22,2} = 0 \\
G_{ij}^k &= G_{ijl} g^{lk} \text{ より、} \\
G_{11}^1 &= G_{111} g^{11} + G_{112} g^{21} = 0, \quad G_{11}^2 = G_{111} g^{12} + G_{112} g^{22} = 0, \quad G_{12}^1 = G_{121} g^{11} + G_{122} g^{21} = 0 \\
G_{21}^1 &= G_{211} g^{11} + G_{212} g^{21} = 0, \quad G_{12}^2 = G_{121} g^{12} + G_{122} g^{22} = 1/x^1, \quad G_{21}^2 = G_{211} g^{12} + G_{212} g^{22} = 1/x^1 \\
G_{22}^1 &= G_{221} g^{11} + G_{222} g^{21} = -x^1, \quad G_{22}^2 = G_{221} g^{12} + G_{222} g^{22} = 0
\end{aligned}$$

と求められる。以上を物理的成分表示に変換する。まず原則的な考え方により求める。ただし、

$$2e_{22} = 2(u_{2,2} - x^1 u_1)$$

$$\tilde{u}^m = \sqrt{g_{mm}} u^m, \quad \tilde{u}_m = \sqrt{g^{mm}} u_m, \quad \text{ただし } m \text{ について総和をとらない。}$$

$$\tilde{e}_{ij} = \frac{1}{\sqrt{g_{ii}} \sqrt{g_{jj}}} e_{ij}, \quad \text{ただし } i, j \text{ について総和をとらない。}$$

を代入する。

線形項：

$$\tilde{e}_{rr} = \frac{1}{\sqrt{g_{rr}} \sqrt{g_{rr}}} e_{rr} = 2u_{1,1} + u^1{}_{,1} u_{1,1} + \left(u^2{}_{,1} + \frac{1}{x^1} u^2\right) \left(u_{2,1} - \frac{1}{x^1} u_2\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{g_{rr}} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\tilde{u}_r}{\sqrt{g^{rr}}} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\tilde{u}_r}{\sqrt{g_{rr}}} \right) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\tilde{u}_r}{\sqrt{g^{rr}}} \right) + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\tilde{u}_q}{\sqrt{g_{qq}}} \right) + \frac{1}{r} \frac{\tilde{u}_q}{\sqrt{g_{qq}}} \right] \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\tilde{u}_q}{\sqrt{g^{qq}}} \right) - \frac{1}{r} \frac{\tilde{u}_q}{\sqrt{g^{qq}}} \right] \right\} \\
&= \frac{\partial \tilde{u}_r}{\partial r} + \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{u}_r}{\partial r} \frac{\partial \tilde{u}_r}{\partial r} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\tilde{u}_q}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\tilde{u}_q}{r} \right\} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r \tilde{u}_q) - \frac{1}{r} r \tilde{u}_q \right] = \frac{\partial \tilde{u}_r}{\partial r} + \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{u}_r}{\partial r} \frac{\partial \tilde{u}_r}{\partial r} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{u}_q}{\partial r} \right) \left(r \frac{\partial \tilde{u}_q}{\partial r} \right) \\
&= \frac{\partial \tilde{u}_r}{\partial r} + \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{u}_r}{\partial r} \frac{\partial \tilde{u}_r}{\partial r} + \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{u}_q}{\partial r} \frac{\partial \tilde{u}_q}{\partial r}
\end{aligned}$$

$$\tilde{e}_{qq} = \frac{1}{\sqrt{g_{22}} \sqrt{g_{22}}} e_{22} = \frac{1}{g_{qq}} \left(\frac{\P}{\P q} \left(\frac{\tilde{u}_q}{\sqrt{g^{qq}}} \right) - r \left(\frac{\tilde{u}_r}{\sqrt{g^{rr}}} \right) \right) = \frac{1}{r^2} \left(\frac{\P}{\P q} (r \tilde{u}_q) - r (\tilde{u}_r) \right) = \frac{\P \tilde{u}_q}{r \P q} - \frac{\tilde{u}_r}{r}$$

$$\tilde{e}_{rq} = \frac{1}{\sqrt{g_{11}} \sqrt{g_{22}}} e_{12}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\tilde{u}_r}{\sqrt{g^{rr}}} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\tilde{u}_q}{\sqrt{g^{qq}}} \right) - \frac{1}{r} \left(\frac{\tilde{u}_q}{\sqrt{g^{qq}}} \right) - \frac{1}{r} \left(\frac{\tilde{u}_q}{\sqrt{g^{qq}}} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\tilde{u}_r}{\sqrt{g_{rr}}} \right) \left(\frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\tilde{u}_r}{\sqrt{g^{rr}}} \right) - \frac{1}{r} \left(\frac{\tilde{u}_q}{\sqrt{g^{qq}}} \right) \right) + \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\tilde{u}_q}{\sqrt{g_{qq}}} \right) + \frac{1}{r} \left(\frac{\tilde{u}_q}{\sqrt{g_{qq}}} \right) \right) \left(\frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\tilde{u}_q}{\sqrt{g^{qq}}} \right) + r \left(\frac{\tilde{u}_r}{\sqrt{g^{rr}}} \right) \right) \right\} \\
&= \frac{\partial \tilde{u}_r}{r \partial q} + \frac{\partial \tilde{u}_q}{\partial r} - \frac{1}{r} \tilde{u}_q + \frac{\partial \tilde{u}_r}{\partial r} \left(\frac{\partial \tilde{u}_r}{r \partial q} - \frac{1}{r} \tilde{u}_q \right) + \frac{\partial \tilde{u}_q}{\partial r} \left(\frac{\partial \tilde{u}_q}{r \partial q} + \frac{1}{r} \tilde{u}_r \right)
\end{aligned}$$