

第3回：ひずみについて

学部の講義における構造力学などで取り扱われているひずみの定義は、線要素に対して次のように表される。

$$e = \frac{Dl}{l}, \quad \text{ここに、} Dl, l \text{ は伸びおよび元の長さ} \quad (4.1a)$$

あるいは、微小線要素を対象とすれば、

$$e = \frac{du}{dx} \quad (4.1b)$$

と表される。これを3次元問題に拡張すれば、

$$e = \begin{bmatrix} e_{xx} & e_{xy} & e_{xz} \\ e_{yx} & e_{yy} & e_{yz} \\ e_{zx} & e_{zy} & e_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (4.2a)$$

となり、原則9個のひずみ成分が考えられる。ただし、実際の解析では $e_{ij} = e_{ji} (i \neq j)$ を考慮して、ひずみを以下のように6成分表示で行う場合が多い。

$$e = \left\langle e_{xx} \quad e_{yy} \quad e_{zz} \quad e_{xy} \quad e_{yz} \quad e_{zx} \right\rangle^T = \left\langle \frac{\partial u}{\partial x} \quad \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial w}{\partial z} \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right\rangle \quad (4.2b)$$

この時の基準座標系はデカルト座標系である。

また、ここで極めて重要な点は、上式で示したいずれの表現においても、「変位は形態の代表的寸法よりも極めて小さい」という仮定が含まれているという点である。すなわち、ひずみと変位の関係は線形関係にあると仮定しているのである。この仮定は通常の弾性範囲程度の変形を対象とした応力解析では十分な精度を有する仮定ではあるが、構造物の崩壊挙動を追跡する上ではナンセンスな仮定である。

図に示すような長方形の物体が 90° 反時計回りに剛体回転する問題を考える。この問題は2次元問題であるから、式(4.2b)のひずみ成分のうち e_{xx}, e_{yy}, e_{xy} のみを考えるものとする。任意点の変位は、

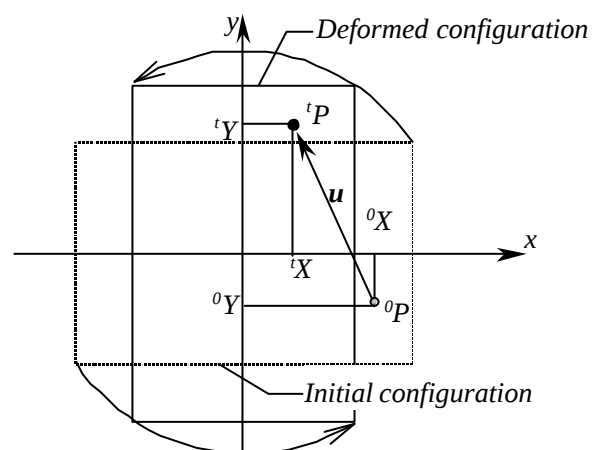
$$U = {}^tX - {}^0X = -{}^0Y - {}^0X$$

$$V = {}^tY - {}^0Y = {}^0X - {}^0Y$$

と表される。これを式(4.2b)に代入しひずみを求めると、

$$e_x = \frac{\partial U}{\partial {}^0X} = -1, \quad e_y = \frac{\partial V}{\partial {}^0Y} = -1$$

$$e_{xy} = \frac{\partial V}{\partial {}^0X} + \frac{\partial U}{\partial {}^0Y} = +1 - 1 = 0$$



となる。上記において、 e_x, e_y が非零となっている。これは、この物体が剛体運動している（剛体運動下ではひずみは生じない）という条件と一致しない。この例からも式(4.2b)等で示されるひずみは比較的大きな変位を伴う場合には用いることができないことが解る。

そこで、構造物が崩壊する時のように変位レベルが比較的大きな場合には、*Green* のひずみと呼ばれるひずみが用いられる。これは次のように求められる。

物体内部の微小線要素 ds を考え、この線要素の長さの自乗を求める。

$$ds = dx^i g_i \text{ より、 } |ds|^2 = ds \cdot ds = (dx^i g_i) \cdot (dx^j g_j) = g_{ij} dx^i dx^j \quad (4.3)$$

ここで、分かりやすくするためにデカルト座標系について一旦考えてみることにし、上式を次のように表わす。

$$ds = dx^i i_i \rightarrow |ds|^2 = ds \cdot ds = (dx^i i_i) \cdot (dx^j i_j) = d_{ij} dx^i dx^j \quad (4.3')$$

またこの線要素の変形後についても同様に求めてみる。微小線要素間における変位 du は、

$$du = \frac{\mathbb{U}}{\mathbb{X}^i} dx^i = \frac{\mathbb{U}}{\mathbb{X}^i} (u^m i_m) dx^i = \frac{\mathbb{U}^m}{\mathbb{X}^i} dx^i i_m \quad (4.4)$$

$${}^t ds = ds + du = dx^i i_i + \frac{\mathbb{U}^m}{\mathbb{X}^i} dx^i i_m \quad (4.5)$$

$$\rightarrow |{}^t ds|^2 = \left(dx^i i_i + \frac{\mathbb{U}^m}{\mathbb{X}^i} dx^i i_m \right) \cdot \left(dx^j i_j + \frac{\mathbb{U}^n}{\mathbb{X}^j} dx^j i_n \right) = \left(d_{ij} + \frac{\mathbb{U}^i}{\mathbb{X}^j} + \frac{\mathbb{U}^j}{\mathbb{X}^i} + d_{mn} \frac{\mathbb{U}^m}{\mathbb{X}^i} \frac{\mathbb{U}^n}{\mathbb{X}^j} \right) dx^i dx^j$$

ここで変形前後の差を計算する。

$$|{}^t ds|^2 - |{}^0 ds|^2 = \left(\frac{\mathbb{U}^i}{\mathbb{X}^j} + \frac{\mathbb{U}^j}{\mathbb{X}^i} + d_{mn} \frac{\mathbb{U}^m}{\mathbb{X}^i} \frac{\mathbb{U}^n}{\mathbb{X}^j} \right) dx^i dx^j \quad (4.6)$$

この結果を次のように表わす。

$$|{}^t ds|^2 - |{}^0 ds|^2 = 2e_{ij} dx^i dx^j, \quad \text{ここに} \quad 2e_{ij} = \frac{\mathbb{U}^i}{\mathbb{X}^j} + \frac{\mathbb{U}^j}{\mathbb{X}^i} + d_{mn} \frac{\mathbb{U}^m}{\mathbb{X}^i} \frac{\mathbb{U}^n}{\mathbb{X}^j} \quad (4.7)$$

これがデカルト座標系における *Green* のひずみの算定式である。(x,y)座標系について具体的に成分表示すれば、

$$e_{xx} = \frac{\mathbb{U}}{\mathbb{X}} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\mathbb{U}}{\mathbb{X}} \right)^2 + \left(\frac{\mathbb{V}}{\mathbb{X}} \right)^2 \right\}, \quad e_{yy} = \frac{\mathbb{V}}{\mathbb{Y}} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\mathbb{U}}{\mathbb{Y}} \right)^2 + \left(\frac{\mathbb{V}}{\mathbb{Y}} \right)^2 \right\}, \quad e_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\mathbb{U}}{\mathbb{Y}} + \frac{\mathbb{V}}{\mathbb{X}} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\mathbb{U}}{\mathbb{X}} \frac{\mathbb{U}}{\mathbb{Y}} + \frac{\mathbb{V}}{\mathbb{X}} \frac{\mathbb{V}}{\mathbb{Y}} \right)$$

となる。

(4.8)

この表現を用いて先の剛体回転の問題を考えてみる。

$$e_x = \frac{\mathbb{U}}{\mathbb{X}^0} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\mathbb{U}}{\mathbb{X}^0} \right)^2 + \left(\frac{\mathbb{V}}{\mathbb{X}^0} \right)^2 \right\} = -1 + \frac{1}{2} \{ (-1)^2 + 1^2 \} = 0,$$

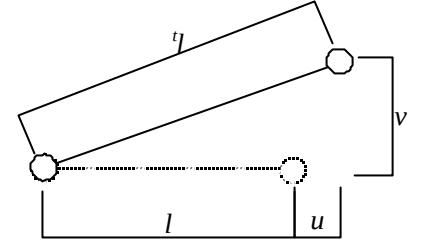
$$e_y = \frac{\mathbb{V}}{\mathbb{Y}^0} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\mathbb{U}}{\mathbb{Y}^0} \right)^2 + \left(\frac{\mathbb{V}}{\mathbb{Y}^0} \right)^2 \right\} = -1 + \frac{1}{2} \{ (-1)^2 + (-1)^2 \} = 0$$

$$e_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\mathbb{V}}{\mathbb{X}^0} + \frac{\mathbb{U}}{\mathbb{Y}^0} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\mathbb{U}}{\mathbb{X}^0} \frac{\mathbb{U}}{\mathbb{Y}^0} + \frac{\mathbb{V}}{\mathbb{X}^0} \frac{\mathbb{V}}{\mathbb{Y}^0} \right) = \frac{1}{2} (+1-1) + \frac{1}{2} \{ (-1) \times (-1) + 1 \times (-1) \} = 0$$

となり、剛体運動の条件に適合する。

これは幾何学的には次のように説明される。今、図のようなトラス要素を考える。これは変形後においても直線を保つものとすれば、変形後の材長は次のように計算することができる。

$${}^t l = \sqrt{(l+u)^2 + v^2} = l \sqrt{1 + 2\frac{u}{l} + \left(\frac{u}{l}\right)^2 + \left(\frac{v}{l}\right)^2} \cong l \left[1 + \frac{u}{l} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{u}{l}\right)^2 + \left(\frac{v}{l}\right)^2 \right\} \right]$$



これより、

$$e = \frac{{}^t l - l}{l} = \frac{u}{l} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{u}{l}\right)^2 + \left(\frac{v}{l}\right)^2 \right\}$$

これは Green のひずみ(式(4.8))に相当する。ただし、本質的に異なる点は、上式が近似式であるのに対して、Green のひずみはその定義において厳密解であるという点である。

Remarks

- ・ 定義においてと敢えて記述したのは、Green のひずみ以外にも種々の異なるひずみが存在しているからである。Almansi のひずみ、対数ひずみ。
- ・ Green のひずみは主として「大変位・微小ひずみ」という条件下において用いられる。この条件は剛体的な移動は大きいがひずみはそれほど大きくないという場合に相当する。解析対象によっては、「大変位・大ひずみ」という条件を想定しなければならない場合もある。例えば、ゴムの変形解析や金属の押し出し加工などがその例である。このような場合には Green のひずみでも問題が生じる場合があり、対数ひずみが用いられる。
- ・ Green のひずみも基準にしているのは、式(4.1a)同様、変形前の形状であることに注意する。このように、変形前を基準にする表記方法を Lagrange 定式化と呼ぶ。上記の Almansi のひずみは変形後を基準にしており、これを Euler 定式化と呼ぶ。なお、テキストによっては、前者を空間固定の座標系を基準座標系とする定式化とし、後者を物質に埋め込まれた座標系を基準座標系とする定式化と位置付けるものもある。

任意座標系におけるひずみ変位関係

ベクトルの微分

上記の記述はデカルト座標系に限定していたので、ここでは任意座標系への拡張を行う。上記の展開においてデカルト座標系の特性を用いた箇所は 2 箇所のみである。一つは計量テンソルをクロネッカーのデルタを用いた点、もう一つはベクトルの微分に関してである。前者は単純に置き換えればよいが、後者は若干の検討を必要とする。再度その部分を示す。

$$du = \frac{\mathbb{I}u}{\mathbb{I}x^i} dx^i = \frac{\mathbb{I}}{\mathbb{I}x^i} (u^m i_m) dx^i = \frac{\mathbb{I}u^m}{\mathbb{I}x^i} dx^i i_m$$

ここで問題はデカルト座標系の基底である単位ベクトルは座標値によらず常に一定(単位)の大きさしか持たないのに対して、一般座標系の基底ベクトルは常に一定とは限らない点である。したがって、上式中

の $\frac{\mathbb{I}}{\mathbb{I}x^i} (u^m i_m) = \frac{\mathbb{I}u^m}{\mathbb{I}x^i} i_m$ なる関係が一般には成立しない。すなわち、

$$\frac{\mathbb{I}}{\mathbb{I}x^i} \left(u^m g_m \right) = \frac{\mathbb{I}u^m}{\mathbb{I}x^i} g_m + u^m \frac{\mathbb{I}g_m}{\mathbb{I}x^i} \neq \frac{\mathbb{I}u^m}{\mathbb{I}x^i} g_m$$

なのである。

そこで必要となるのが上式中の基底ベクトルの微分である。これを考える時も先に座標変換係数のところで用いた考えと同様の方法をとる。つまりベクトルの変化率もまたベクトルであり、任意のベクトルは基底ベクトルによって一義的に表現できることから、

$$g_{m,j} := \frac{\mathbb{I}g_m}{\mathbb{I}x^j} = G_{mj}^k g_k$$

として基底ベクトルの微分を考えられるはずである。この表現を用いると、

$$\frac{\mathbb{I}}{\mathbb{I}x^i} \left(u^m g_m \right) = \frac{\mathbb{I}u^m}{\mathbb{I}x^i} g_m + u^m \frac{\mathbb{I}g_m}{\mathbb{I}x^i} = \frac{\mathbb{I}u^m}{\mathbb{I}x^i} g_m + u^m G_{mi}^k g_k = \left(\frac{\mathbb{I}u^m}{\mathbb{I}x^i} + u^n G_{ni}^m \right) g_m$$

となり、これをデカルト座標系における表現と同じにするために次のように表示する。

$$\frac{\mathbb{I}}{\mathbb{I}x^i} \left(u^m g_m \right) = u^m \Big|_i g_m, \quad \text{ここに} \quad u^m \Big|_i := \frac{\mathbb{I}u^m}{\mathbb{I}x^i} + u^n G_{ni}^m$$

この $u^m \Big|_i$ のことを共変微分（導関数）と呼ぶ。当然ながらデカルト座標系では共変微分は偏微分と同じである。またここで新たに導入した G はクリストッフェル記号と呼ばれるものであり、幾何学的に考えれば、基底ベクトルが位置ベクトルの 1 階微分であることから、クリストッフェル記号は座標系が有する曲率を意味していることは明らかである。このクリストッフェル記号を求めるには次式を用いる。

$$2G_{ijk} = g_{jk,i} + g_{ki,j} - g_{ij,k}, \quad G_{ij}^k = G_{ijl} g^{lk} \quad \text{注意: } G_i^{jk} \text{ や } G^{ijk} \text{ は存在しない (1 階のテンソル)}$$

任意座標系におけるひずみ変位関係式

前回はデカルト座標系における Green のひずみの算定式を求めた。ここではこれを一般の座標系へと拡張する。考え方はデカルト座標系の場合と全く同じである。

物体内部の微小線要素 ds を考え、この線素の長さの自乗を求める。

$$ds = dx^i g_i \text{ より, } |ds|^2 = ds \cdot ds = (dx^i g_i) \cdot (dx^j g_j) = g_{ij} dx^i dx^j$$

またこの線要素の変形後についても同様に求めてみる。微小線要素間における変位 du は共変微分を用いて表示すると次のように表わすことができる。

$$du = \frac{\mathbb{I}u}{\mathbb{I}x^i} dx^i = \frac{\mathbb{I}}{\mathbb{I}x^i} \left(u^m g_m \right) dx^i = u^m \Big|_i dx^i g_m$$

これより、

$${}^t ds = ds + du = dx^i g_i + u^m \Big|_i dx^i g_m$$

$$\rightarrow |{}^t ds|^2 = \left(dx^i g_i + u^m \Big|_i dx^i g_m \right) \cdot \left(dx^j g_j + u^n \Big|_j dx^j g_n \right) = \left(g_{ij} + u_i \Big|_j + u_j \Big|_i + g_{mn} u^m \Big|_i u^n \Big|_j \right) dx^i dx^j$$

ここで変形前後の差を計算する。

$$\left| {}^t ds \right|^2 - \left| {}^0 ds \right|^2 = \left(u_i \Big|_j + u_j \Big|_i + g_{mn} u^m \Big|_i u^n \Big|_j \right) dx^i dx^j$$

この結果を次のように表わす。

$$\left| {}^t ds \right|^2 - \left| {}^0 ds \right|^2 = 2e_{ij} dx^i dx^j ,$$

ここに

$$2e_{ij} = u_i \Big|_j + u_j \Big|_i + g_{mn} u^m \Big|_i u^n \Big|_j = u_i \Big|_j + u_j \Big|_i + u^m \Big|_i u_n \Big|_j$$

これが任意座標系における *Green* のひずみの算定式である。

しかしながら、ここで注意しなければならない点は、上式中のひずみや変位は物理成分ではなく、テンソル成分であるということである。つまりそれぞれの変数は物理的な単位を有していない。これは次のような理由から明らかである。

変位においては； $u = u^m g_m$ としている。基底ベクトルは単位ベクトルではないから、 u^m は必ずしも物理的な大きさを有しているわけではない。

ひずみにおいては；微小線素の長さの 2 乗の変化をひずみと定義している。すなわち、

$$\left| {}^t ds \right|^2 - \left| {}^0 ds \right|^2 = 2e_{ij} dx^i dx^j .$$

しかしながら dx^i は物理的な長さを有していないから、 e_{ij} は物理

的な大きさを有しているわけではない。

そのために、テンソル解析で得られた式をそのまま工学上の問題にできようすることはできない（正確には注意を要する）。つまり物理的な式への変換が必要となる。このことはテンソル解析（あるいはその有益性）を理解する上で大きな障害であり、そのために多くのテキストではテンソル式を用いながらデカルト座標系を用いるという手段を採っている。しかしながら、近年ではコンピュータの処理速度の高速化によりこのような変換をもコンピュータに委ねるコーディングが行われている。特にシェル構造などの曲面を対象とする要素やアーチ構造などの曲線を対象とする要素ではこのような手段が採られている。