

第2回：テンソルの概要

座標変換

前回の講義において任意のベクトルは次式で表されることとなった。

$$\mathbf{v} = v^i \mathbf{g}_i = v_i \mathbf{g}^i \quad (3.1)$$

ここに、 v^i, v_i は今考えている座標系 (x^1, x^2, x^3) のテンソル成分である(物理的な意味はないかもしれない)。ここで、新たな座標系 (z^1, z^2, z^3) を考えると、上式と同様の関係が当然成り立つ。

$$\mathbf{v} = v^{i'} \mathbf{g}_{i'} = v_{i'} \mathbf{g}^{i'} \quad (3.2)$$

一般に基底ベクトルは独立でなければならず、また独立なベクトル群は独立なベクトル群によって表現されることから、上記の2つの基底ベクトル間には次のような関係が成り立つべきある。

$$\mathbf{g}_{i'} = b_{i'}^j \mathbf{g}_j, \quad \mathbf{g}^{i'} = b_j^{i'} \mathbf{g}^j \quad (3.3)$$

この $b_{i'}^j$ を座標変換係数と呼ぶ。また $v^i, v^{i'}$ の関係は、 $\mathbf{v} = v^{i'} \mathbf{g}_{i'} = v^{i'} b_{i'}^k \mathbf{g}_k$ より、

$$v^k = v^{i'} b_{i'}^k \quad (3.4)$$

となる。共変成分についても同様の関係が成り立つことは明らかである。

この座標変換係数の意味を明らかにするために、再度微小線要素 ds を考えると、式(3.3)から、

$$ds = dx^i \mathbf{g}_i = dx^i b_{i'}^{j'} \mathbf{g}_{j'}$$

となり、一方、微分におけるチェーンルール、すなわち $dx^{j'} = \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i} dx^i$ なる関係より、

$$ds = dx^{j'} \mathbf{g}_{j'} = \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i} dx^i \mathbf{g}_{j'}$$

が成り立つ。この両式を比較することにより、座標変換係数は次のように表現される。

$$b_{i'}^{j'} = \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i} \quad (3.5)$$

すなわち、座標変換係数は $(x^1, x^2, x^3), (z^1, z^2, z^3)$ 間のヤコビアンマトリクスであるといえることができる。

またこの座標変換則に則するということがテンソル解析での基本条件になっている。この点を明らかにするために、まず計量テンソルについて座標変換を施してみる。

$$g_{i'j'} = \mathbf{g}_{i'} \cdot \mathbf{g}_{j'} = b_{i'}^k \mathbf{g}_k \cdot b_{j'}^l \mathbf{g}_l = b_{i'}^k b_{j'}^l g_{kl}$$

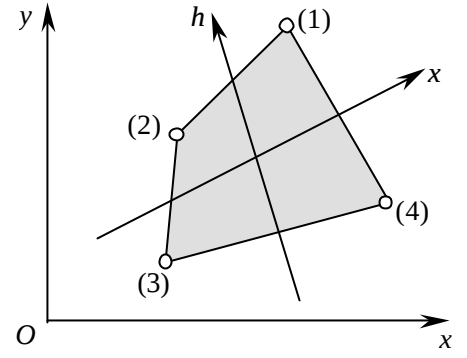
$$g^{i'j'} = \mathbf{g}^{i'} \cdot \mathbf{g}^{j'} = b_k^{i'} \mathbf{g}^k \cdot b_l^{j'} \mathbf{g}^l = b_k^{i'} b_l^{j'} g^{kl}$$

つまり、計量テンソルは2つの添字を有するが、これがともに、また反変、共変ともに座標変換係数によって座標変換することが可能である、ということになる。したがってこの計量テンソルはテンソルであるといえるのである。

問題 図のような 2 次元空間にある四角形要素を考え、要素内に設定した座標系を (x, h) ; $x=[-1,1], h=[-1,1]$ とする時この座標系の基底ベクトル、計量テンソルおよび (x, h) - (x, y) 間の座標変換係数、グリーンのひずみを求めよ。なお、要素内の位置ベクトルは次式で与えられるものとする。

$$\mathbf{x} = \mathbf{N}_{node} \mathbf{x} \quad (\text{P.1a})$$

$$\mathbf{u}(x, h) = \mathbf{N}(x, h)_{node} \mathbf{u} \quad (\text{P.1b})$$



ここに、

$$\mathbf{x}^T = \langle x, y \rangle, \quad node \mathbf{x}^T = \langle (1) \mathbf{x}^T (2) \mathbf{x}^T (3) \mathbf{x}^T (4) \mathbf{x}^T \rangle \quad \mathbf{u}^T = \langle u, v \rangle, \quad node \mathbf{u}^T = \langle (1) \mathbf{u}^T (2) \mathbf{u}^T (3) \mathbf{u}^T (4) \mathbf{u}^T \rangle$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} (1)h & 0 & (2)h & 0 & (3)h & 0 & (4)h & 0 \\ 0 & (1)h & 0 & (2)h & 0 & (3)h & 0 & (4)h \end{bmatrix} \quad (\text{P.2a}) \quad (i) h = \frac{1}{4} \left(1 + (i)xx \right) \left(1 + (i)hh \right) \quad (\text{P.2b})$$

である。 N は形状関数(shape function)と通常呼ばれる。アイソパラメトリック要素の多くで用いられる関数 $(i)h$ は節点 (i) のみでその値が 1 となり他の節点では零となる。

解 まず、基底ベクトルに必要な計算を行っておく。まず式(P.2)を具体的に表現しておく。

$$x = \left\langle \frac{1}{4}(1+x)(1+h) \quad \frac{1}{4}(1-x)(1+h) \quad \frac{1}{4}(1-x)(1-h) \quad \frac{1}{4}(1+x)(1-h) \right\rangle \begin{Bmatrix} (1)x \\ (2)x \\ (3)x \\ (4)x \end{Bmatrix} \quad (\text{P.3a})$$

$$y = \left\langle \frac{1}{4}(1+x)(1+h) \quad \frac{1}{4}(1-x)(1+h) \quad \frac{1}{4}(1-x)(1-h) \quad \frac{1}{4}(1+x)(1-h) \right\rangle \begin{Bmatrix} (1)y \\ (2)y \\ (3)y \\ (4)y \end{Bmatrix} \quad (\text{P.3b})$$

これより、

$$\frac{\mathbb{I}x}{\mathbb{I}h} = \left\langle \frac{1}{4}(1+h) - \frac{1}{4}(1+h) - \frac{1}{4}(1-h) \quad \frac{1}{4}(1-h) \right\rangle \begin{Bmatrix} (1)x \\ (2)x \\ (3)x \\ (4)x \end{Bmatrix}, \quad \frac{\mathbb{I}x}{\mathbb{I}h} = \left\langle \frac{1}{4}(1+x) \quad \frac{1}{4}(1-x) - \frac{1}{4}(1-x) - \frac{1}{4}(1+x) \right\rangle \begin{Bmatrix} (1)x \\ (2)x \\ (3)x \\ (4)x \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4} \left((1)x - (2)x - (3)x + (4)x \right) + \frac{h}{4} \left((1)x - (2)x + (3)x - (4)x \right) = \frac{1}{4} \left((1)x + (2)x - (3)x - (4)x \right) + \frac{x}{4} \left((1)x - (2)x + (3)x - (4)x \right) \quad (\text{P.4a}) \quad (\text{P.4b})$$

$$\frac{\mathbb{I}y}{\mathbb{I}h} = \left\langle \frac{1}{4}(1+h) - \frac{1}{4}(1+h) - \frac{1}{4}(1-h) \quad \frac{1}{4}(1-h) \right\rangle \begin{Bmatrix} (1)y \\ (2)y \\ (3)y \\ (4)y \end{Bmatrix}, \quad \frac{\mathbb{I}y}{\mathbb{I}h} = \left\langle \frac{1}{4}(1+x) \quad \frac{1}{4}(1-x) - \frac{1}{4}(1-x) - \frac{1}{4}(1+x) \right\rangle \begin{Bmatrix} (1)y \\ (2)y \\ (3)y \\ (4)y \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4} \left((1)y - (2)y - (3)y + (4)y \right) + \frac{h}{4} \left((1)y - (2)y + (3)y - (4)y \right) = \frac{1}{4} \left((1)y + (2)y - (3)y - (4)y \right) + \frac{x}{4} \left((1)y - (2)y + (3)y - (4)y \right) \quad (\text{P.4c}) \quad (\text{P.4d})$$

以上から**基底ベクトル**を求めると、定義 $g_i = \frac{\mathbf{q}_i}{\mathbf{q}_i^T \mathbf{x}}$ より、

$$\mathbf{g}_x = \begin{Bmatrix} \frac{\mathbf{q}_x}{\mathbf{q}_x^T \mathbf{x}} \\ \frac{\mathbf{q}_y}{\mathbf{q}_x^T \mathbf{x}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{4} \left((1)^{x-} (2)^{x-} (3)^{x+} (4)^x \right) + \frac{h}{4} \left((1)^{x-} (2)^{x+} (3)^{x-} (4)^x \right) \\ \frac{1}{4} \left((1)^{y-} (2)^{y-} (3)^{y+} (4)^y \right) + \frac{h}{4} \left((1)^{y-} (2)^{y+} (3)^{y-} (4)^y \right) \end{Bmatrix} \quad (\text{P.5a})$$

$$\mathbf{g}_h = \begin{Bmatrix} \frac{\mathbf{q}_x}{\mathbf{q}_h^T \mathbf{x}} \\ \frac{\mathbf{q}_y}{\mathbf{q}_h^T \mathbf{x}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{4} \left((1)^{x+} (2)^{x-} (3)^{x-} (4)^x \right) + \frac{x}{4} \left((1)^{x-} (2)^{x+} (3)^{x-} (4)^x \right) \\ \frac{1}{4} \left((1)^{y+} (2)^{y-} (3)^{y-} (4)^y \right) + \frac{x}{4} \left((1)^{y-} (2)^{y+} (3)^{y-} (4)^y \right) \end{Bmatrix} \quad (\text{P.5b})$$

となる。

計量テンソルは、定義 $g_{ij} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j$ より、

$$g_{xx} = \mathbf{g}_x \cdot \mathbf{g}_x =$$

$$\left\{ \frac{1}{4} \left((1)^{x-} (2)^{x-} (3)^{x+} (4)^x \right) + \frac{h}{4} \left((1)^{x-} (2)^{x+} (3)^{x-} (4)^x \right) \right\}^2 + \left\{ \frac{1}{4} \left((1)^{y-} (2)^{y-} (3)^{y+} (4)^y \right) + \frac{h}{4} \left((1)^{y-} (2)^{y+} (3)^{y-} (4)^y \right) \right\}^2 \quad (\text{P.6})$$

のようにして求めることができる。以下省略

座標変換係数は、定義 $g_{i'} = b_{i'}^j g_j$ から、 $\mathbf{g}_a = b_a^j \mathbf{i}_j$ を満足する b_a^j を求めればよい。そこでこの式の両辺に $\mathbf{i}_k$ をスカラー積する。

$$\mathbf{g}_a = b_a^j \mathbf{i}_j \rightarrow \mathbf{g}_a \cdot \mathbf{i}_k = b_a^j \mathbf{i}_j \cdot \mathbf{i}_k = b_a^j \delta_{jk} = b_a^k \quad (\text{P.7})$$

ここで、上式中の $\mathbf{g}_a \cdot \mathbf{i}_k$ は $\mathbf{g}_a$ の (x,y) 座標系成分を表わしているから、結局、 (x,h) 座標系の基底ベクトル $\mathbf{g}_a$ の (x,y) 座標系成分が (x,h) - (x,y) 間の座標変換係数であることが解る（ただし、このような解釈ができるのは (x,y) 座標系がデカルト座標系であるためであることに注意する。なぜならばデカルト座標系では反変および共変基底ベクトルが同一だからである）。したがって、

$$b_a^j = \begin{Bmatrix} \frac{1}{4} \left((1)^{x-} (2)^{x-} (3)^{x+} (4)^x \right) + \frac{h}{4} \left((1)^{x-} (2)^{x+} (3)^{x-} (4)^x \right) \\ \frac{1}{4} \left((1)^{y-} (2)^{y-} (3)^{y+} (4)^y \right) + \frac{h}{4} \left((1)^{y-} (2)^{y+} (3)^{y-} (4)^y \right) \end{Bmatrix} \quad (\text{P.8})$$

となる。

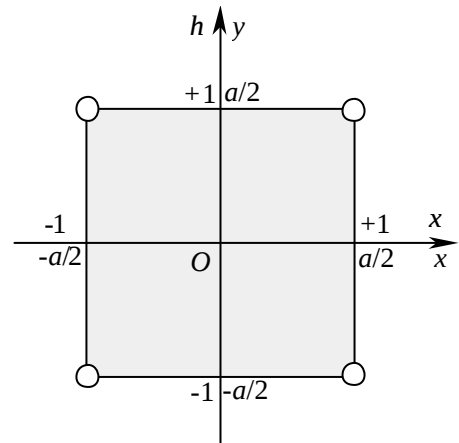
次に、これらの意味を明らかにするために具体的に節点の座標値を与えて考察を行うこととする。

Example 1

$(1)^{x-} (4)^{x-} (2)^{x-} (3)^{x-} = a/2$, $(1)^{y-} (2)^{y-} (3)^{y-} (4)^{y-} = a/2$ の場合（これは四角形が正方形（ $a \times a$ ）の場合である）

この値を式(P.5)に代入し基底ベクトルを計算すると次のようになる。

$$\mathbf{g}_x = \begin{Bmatrix} \frac{a}{2} \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \frac{a}{2} \mathbf{i}_x \quad , \quad \mathbf{g}_h = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{a}{2} \end{Bmatrix} \Rightarrow \frac{a}{2} \mathbf{i}_y \quad (\text{P.6})$$



これは、 g_x は大きさが $a/2$ で方向が x 方向のベクトルであること、 g_h が大きさ $a/2$ で方向が y 方向のベクトルであることを意味しており、基底ベクトル自身が物理的な大きさ（長さ）を有していることがこの例でも理解される。この理由は、 (x,h) 座標系が正規化された座標系であり、座標系自体に物理的な大きさが内包されているためである。一方、 g^i は g_i と正規直交するベクトルであるから、

$$g^x = \left\{ \frac{2}{a} \right\} \Rightarrow \frac{2}{a} i_x, \quad g^h = \left\{ \frac{2}{a} \right\} \Rightarrow \frac{2}{a} i_y \quad \because g_i \cdot g^j = \delta_i^j \quad (P.6')$$

であることは自明である。

この時の計量テンソルは、

$$g_{xx} = g_{hh} = \frac{a^2}{4}, \quad g_{xh} = 0 \quad (P.7)$$

となり、この座標系が内包する物理的な大きさの 2 乗を意味している。

また、座標変換係数は、式(P.8)より

$$b_a^i = \begin{bmatrix} \frac{\nabla x}{\nabla x} & \frac{\nabla y}{\nabla x} \\ \frac{\nabla x}{\nabla h} & \frac{\nabla y}{\nabla h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a}{2} & 0 \\ 0 & \frac{a}{2} \end{bmatrix} \quad (P.8)$$

となる。この式は非常に重要な意味を持っている。すなわち、 (x,h) 座標系成分を (x,y) 座標系成分に変換するという事は、この変換係数は、物理的な意味を持たないテンソル成分を物理的な意味を有するデカルト座標系成分に置換する変換係数である、ということである。

$(1)x=0, (2)x=-a, (3)x=0, (4)x=a, (1)y=a, (2)y=0, (3)y=-a, (4)y=0$ の場合

この値を式(P.5)に代入し基底ベクトルを計算すると次のようになる。

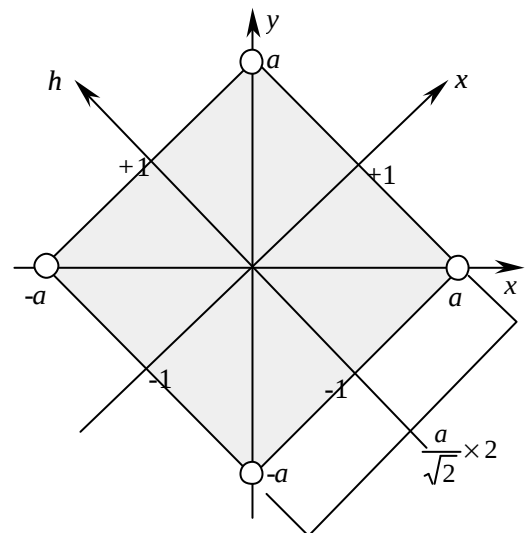
$$g_x = \left\{ \frac{a}{2} \right\} = \frac{a}{2} i_x + \frac{a}{2} i_y, \quad g_h = \left\{ \frac{-a}{2} \right\} = -\frac{a}{2} i_x + \frac{a}{2} i_y \quad (P.9)$$

これより、計量テンソルは、

$$g_{xx} = g_{hh} = \frac{a^2}{2} = \left(\frac{a}{\sqrt{2}} \right)^2, \quad g_{xh} = 0 \quad (P.10)$$

となる。図からも明らかなように (x,h) 座標系が内包している大きさは $\frac{a}{\sqrt{2}}$ であり、計量テンソルはこの値の 2 乗となっている。

(x,h) と (x,y) 座標系間の関係は、基底ベクトルより、



$$b_a^i = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{q}|x}{\mathbf{q}|h} & \frac{\mathbf{q}|y}{\mathbf{q}|h} \\ \frac{\mathbf{q}|x}{\mathbf{q}|x} & \frac{\mathbf{q}|y}{\mathbf{q}|x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a}{2} & \frac{a}{2} \\ -\frac{a}{2} & \frac{a}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{P.11})$$

となる。これを 45° 回転した時の回転マトリクスと比較する。この時の回転マトリクスは、

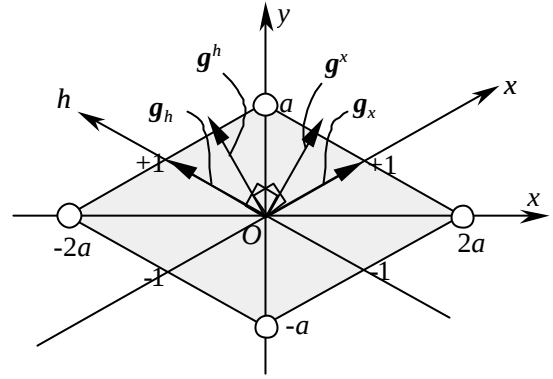
$$\begin{bmatrix} \cos 45^\circ & \sin 45^\circ \\ -\sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{P.12})$$

であるから、先の変換係数は 45° 回転すると同時に $\frac{a}{\sqrt{2}}$ 倍の拡大変換を行っていることが解る。

$(1)x=0, (2)x=-2a, (3)x=0, (4)x=2a, (1)y=a, (2)y=0, (3)y=-a, (4)y=0$ の場合

この値を式(P.5)に代入し基底ベクトルを計算すると次のようになる。

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_x &= \left\{ \frac{a}{2} \right\} = a\mathbf{i}_x + \frac{a}{2}\mathbf{i}_y, \\ \mathbf{g}_h &= \left\{ \frac{-a}{2} \right\} = -a\mathbf{i}_x + \frac{a}{2}\mathbf{i}_y \end{aligned} \quad (\text{P.13})$$



これより、計量テンソルは、

$$g_{xx} = g_{hh} = \frac{5a^2}{4} = \left(\frac{\sqrt{5}a}{2} \right)^2, \quad g_{xh} = -\frac{3a^2}{4} \quad (\text{P.14})$$

となる。ここで、 g_{xh} が零でないということは非零となっており、 (x, h) 座標系が直交座標系でないことを示している。したがって、前の2例のように直感的に g^i を求めることは容易ではない。ここでは正攻法にてこれを求めてみる。まず、計量テンソルの共変成分が求められていることから、 $g_{ik} g^{kj} = d_i^j$ より計量テンソルの反変成分を求める。

$$g^{ij} = \begin{bmatrix} g^{xx} & g^{xh} \\ g^{xh} & g^{hh} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{xx} & g_{xh} \\ g_{xh} & g_{hh} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5a^2}{4} & -\frac{3a^2}{4} \\ -\frac{3a^2}{4} & \frac{5a^2}{4} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\frac{25a^4 - 9a^4}{16}} \begin{bmatrix} \frac{5a^2}{4} & \frac{3a^2}{4} \\ \frac{3a^2}{4} & \frac{5a^2}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{4a^2} & \frac{3}{4a^2} \\ \frac{3}{4a^2} & \frac{5}{4a^2} \end{bmatrix}$$

計量テンソルの反変成分が求められたなら、 $g^i = g^{ij} g_j$ なる関係を用いて g^i を求められる。

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}^x &= g^{xj} \mathbf{g}_j = g^{xx} \mathbf{g}_x + g^{xh} \mathbf{g}_h = \frac{5}{4a^2} \left\{ \frac{a}{2} \right\} + \frac{3}{4a^2} \left\{ \frac{-a}{2} \right\} = \left\{ \frac{1}{2a} \right\} = \frac{1}{2a} \mathbf{i}_x + \frac{1}{a} \mathbf{i}_y, \\
\mathbf{g}^h &= g^{hj} \mathbf{g}_j = g^{hx} \mathbf{g}_x + g^{hh} \mathbf{g}_h = \frac{3}{4a^2} \left\{ \frac{a}{2} \right\} + \frac{5}{4a^2} \left\{ \frac{-a}{2} \right\} = \left\{ -\frac{1}{2a} \right\} = -\frac{1}{2a} \mathbf{i}_x + \frac{1}{a} \mathbf{i}_y \quad (\text{P.15})
\end{aligned}$$

当然ではあるが、この結果は、 $\mathbf{g}^x$ が $\mathbf{g}_h$ に直交するベクトル、 $\mathbf{g}^h$ が $\mathbf{g}_x$ に直交するベクトルであることを示す。ここで再度反変共変の意味を確認すると、例えば、ベクトル $\mathbf{u}$ とベクトル $\mathbf{p}$ のスカラー積を計算する場合に、デカルト座標系では、 $\mathbf{u} \cdot \mathbf{p} = (u_x \mathbf{i}_x + u_y \mathbf{i}_y) \cdot (p_x \mathbf{i}_x + p_y \mathbf{i}_y) = u_x p_x + u_y p_y$ （各成分同士を乗じたものの総和）として求められるが、 $\mathbf{u} \cdot \mathbf{p} = (u^x \mathbf{g}_x + u^h \mathbf{g}_h) \cdot (p^x \mathbf{g}_x + p^h \mathbf{g}_h) = u^i p^j g_{ij} \neq u^x p^x + u^h p^h$ となってしまう。反変共変成分を考慮すると、 $\mathbf{u} \cdot \mathbf{p} = (u^x \mathbf{g}_x + u^h \mathbf{g}_h) \cdot (p_x \mathbf{g}^x + p_h \mathbf{g}^h) = u^i p_j d^i_j = u^i p_i = u^x p_x + u^h p_h$ となり、デカルト座標系における表現と一致させることが可能となる。