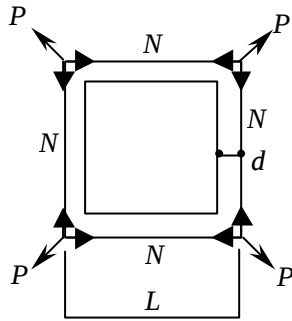


第1回：テンソルの概要

デカルト座標系とその他の座標系

デカルト(Descartes)座標系（あるいは Cartesian）とは、通常用いられる直角座標系(x,y,z)のことである。これに対してよく用いられるその他の座標系としては2次元空間での極座標系や3次元空間での円筒座標系、球座標系がある。このような座標系が用いられる理由を明らかにするために次のような単純な例を考える。



まず最初に、正方形の形をした針金の各頂点に力 P を作用させ、この時の力と変位の関係を求める問題を考える。

荷重 P が作用すると、針金にはこれと釣り合うべく軸力 N が生じる。こ

の N は、 $N = \frac{\sqrt{2}}{2} P$ で表される。このことから、辺の伸びと荷重の関係は、

$$d = eL = \frac{s}{E} L = \frac{N}{EA} L = \frac{\sqrt{2}PL}{2EA}$$

と求められる。

次にリング状に加工した針金に放射線状の分布荷重 p を加えた問題を考える。この時針金には $N = pR_0$ なる軸力が発生する。また半径 R_0 が d だけ変化した時、針金に生ずるひずみは、

$$e = \frac{DL}{L} = \frac{2pR - 2pR_0}{2pR_0} = \frac{d}{R_0}$$

と表わせることから、半径の変化と荷重 p の関係は、

$$d = eR_0 = \frac{s}{E} R_0 = \frac{N}{EA} R_0 = \frac{pR_0^2}{EA}$$

と求められる。

ここで、両者の問題で暗黙に考えられている荷重、変位およびひずみを比較してみると、前者は(x,y)座標系であり、後者は(r,θ)座標系であることに気が付く。すなわち、前者のひずみは x（あるいは y）方向のひずみであり、後者では円周方向のひずみである。このように問題に最もふさわしい基準となる座標系を選択することにより簡単に解を求めることができる。そのためにシェル構造や膜構造では、その形態に応じて球座標系や円筒座標系が用いられるのである。

しかしながら、この座標系の選択における問題点は定式化を行う上で重要な問題点を提起する。それは釣り合い方程式、適合条件式、構成方程式などの表現が座標系毎に変化してしまうという点である。例えば、上記の例では、ひずみと変位の関係が、

デカルト座標系：
$$e_x = \frac{DL_x}{L_x} \text{ あるいは } e_y = \frac{DL_y}{L_y}$$

極座標系：
$$e_r = \frac{DR}{R}$$

と表現される。これは相似形ではあるが、意味は全く異なり、デカルト座標系では x 方向のひずみは x 方向の伸びで決定されるのに対して、極座標系では、周方向のひずみが半径方向の伸びで決定されている。

このように座標系が変化するとその座標系での各関係性を求め直す必要があり、一般的な表現は求められないということになってしまうのである。この点を克服するために考え出されたのがテンソル解析である。

基底ベクトルおよび共変、反変成分

まず、基準座標系をデカルト座標系 (x,y) とした場合について考えてみる。任意点に作用する荷重ベクトルを $\mathbf{p}$ とすれば、この位置ベクトルは (x,y) 座標系の単位ベクトルを用いて次のように表される。

$$\mathbf{p} = p_x \mathbf{i}_x + p_y \mathbf{i}_y = \sum_{m=1}^2 p_m \mathbf{i}_m \quad (1)$$

ここに、 $\mathbf{i}_x, \mathbf{i}_y$ は次のような直交性を満足している。

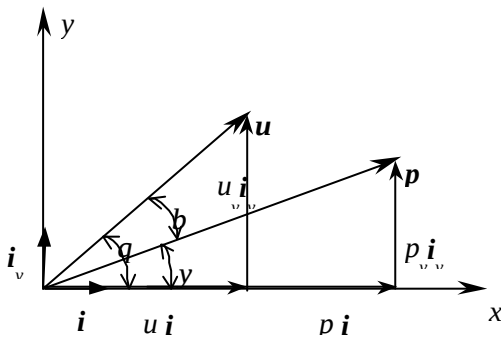
$$\mathbf{i}_x \cdot \mathbf{i}_x = \mathbf{i}_y \cdot \mathbf{i}_y = 1, \quad \mathbf{i}_x \cdot \mathbf{i}_y = \mathbf{i}_y \cdot \mathbf{i}_x = 0 \quad \text{ここに、} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \text{ はスカラー積を表わす。} \quad (2a)$$

あるいは、クロネッカーの δ を用いて表現すると、

$$\mathbf{i}_m \cdot \mathbf{i}_n = \delta_{mn} \quad \text{ここに、} \delta_{mn} = \begin{cases} 1 & \text{at } m=n \\ 0 & \text{at } m \neq n \end{cases} \quad (2b)$$

となる。また、この時荷重が作用した点において変位 $\mathbf{u}$ が生じたとすれば荷重ベクトル $\mathbf{p}$ による仕事は次のように表される。

$$W = \mathbf{p} \cdot \mathbf{u} = \left(\sum_{m=1}^2 p_m \mathbf{i}_m \right) \cdot \left(\sum_{n=1}^2 u_n \mathbf{i}_n \right) = p_x u_x + p_y u_y \quad (3)$$



証明：

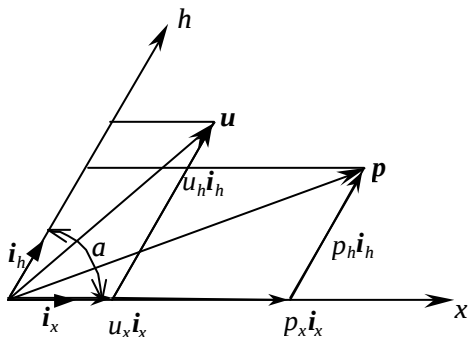
$$\begin{aligned} & p_x u_x + p_y u_y \\ &= p u \cos q \cos y + p u \sin q \sin y \\ &= p u (\cos q \cos y + \sin q \sin y) \\ &= p u \cos(q - y) = p u \cos b = \mathbf{p} \cdot \mathbf{u} \end{aligned}$$

ここに、 $p = |\mathbf{p}|$, $u = |\mathbf{u}|$ である。

次に、同様の考察を、斜交座標系を基準座標系として行ってみる。 $\mathbf{p}, \mathbf{u}$ による仕事は、

$$W = \mathbf{p} \cdot \mathbf{u} = p_x (u_x + u_h \cos a) + p_h (u_h + u_x \cos a) \quad (4)$$

と表される。



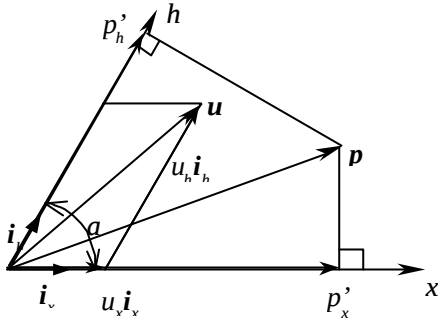
証明：

$$\begin{aligned} & p_x (u_x + u_h \cos a) + p_h (u_h + u_x \cos a) \\ &= (p_x - p_h \cos a) u_x + p_h (u_h + (u_x - u_h \cos a) \cos a) \\ &= p_x u_x + p_h u_h \sin^2 a \\ &= p_x u_x + p_y u_y = \mathbf{p} \cdot \mathbf{u} \end{aligned}$$

一方、式(4)は荷重ベクトルを基本として考えた表現であるが、変位ベクトルを基本として表現すると、仕事は次のように表される。

$$W = \mathbf{p} \cdot \mathbf{u} = u_x (p_x + p_h \cos a) + u_h (p_h + p_x \cos a) \quad (4')$$

(当然ながら、両表現は同じ仕事に対する仕事であるから等しい。)



ここで、式(4)と(4')中の荷重の表現を比較すると、式(4)は x, h 軸に平行な成分、式(4')は x, h 軸に垂直な投影成分により荷重ベクトルが表現されている。

この表現の違いを正しく記述するために、上記成分に対して以下のような記述をそれぞれ用いるものとする。

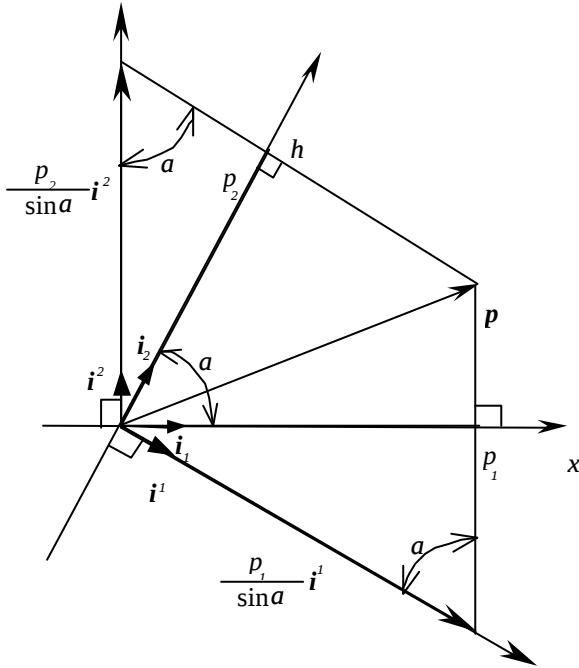
$$p_x \Rightarrow p^1, \quad p_h \Rightarrow p^2 \quad (5a)$$

$$p'_x \Rightarrow p_1, \quad p'_h \Rightarrow p_2 \quad (5b)$$

式(5a)のように表現される成分をベクトル p の反変成分と呼び、式(5b)で表される成分を共変成分と呼ぶ。反変成分は従来のベクトル成分であり、これら成分と単位ベクトル i_m を用いてベクトル p を表わすことができる。

$$p = p^1 i_1 + p^2 i_2 \quad \text{式(1)参照} \quad (6)$$

では、共変成分とはどのようなものであろうか？共変成分は x, h 軸に垂直に投影した成分であった。そこで、 i_1 に直角な単位ベクトル i^2 、および i_2 に直角な単位ベクトル i^1 を考えると、ベクトル p は右の図から次のように表されることが理解される。



$$p = \frac{p_1}{\sin a} i^1 + \frac{p_2}{\sin a} i^2 \quad (7)$$

さらにここで、上式が式(6)と同様の表現となるように次のように書き改める。

$$p = p_1 g^1 + p_2 g^2 \quad (8)$$

ここに、

$$g^m = \frac{i^m}{\sin a} \quad (9)$$

であり、この g^m を基底ベクトルと呼ぶ。この基底ベクトルは i_n と次の関係を持つ。

$$g^m \cdot i_n = 0 \quad \text{at} \quad m \neq n \quad (10a)$$

$$g^m \cdot i_m = \frac{1}{\sin a} i^m \cdot i_m = 1 \quad (10b)$$

ここでは、結果として反変基底ベクトル g^m と i_n が直交することを示したが、テンソル解析における考え方はこれと逆であり、共変基底ベクトル i_n と直交するように反変基底ベクトル g^m が定義される。

何故このような一見面倒なことを考えなければならないのか？は、すべての理由は式(8)に隠されている。すなわち、形式上荷重ベクトルおよび変位ベクトル p, u は次のように表されることとなった。

$$p = \sum_{i=1}^n p_i g^i = \sum_{i=1}^n p^i g_i, \quad u = \sum_{i=1}^n u_i g^i = \sum_{i=1}^n u^i g_i \quad (11)$$

この時の仕事は次のように表わすことができる。

$$W = p \cdot u = \left(\sum_{i=1}^n p^i g_i \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n u_i g^i \right) = \sum_{i=1}^n p^i u_i \Rightarrow p^1 u_1 + p^2 u_2 \quad \text{at} \quad n=2 \quad (12)$$

ここに、 $g_i \cdot g^j = d_i^j$ (式(10)参照)である。

これは、式(3)のデカルト座標系における表現と酷似している。つまり座標系が異なるものでも物理的に同じ意味を有するものを同じ表現で表わすことができるようにする、これがテンソル解析における基本概念である。

さらに理解を深めるために、極座標系(r, q)について考えてみよう。まず、微小線要素 ds を考える。このベクトルはデカルト座標系(x, y)において次のように記述される。

$$ds = dx i_x + dy i_y \quad (13)$$

一方、座標系(r, q)の単位方向ベクトルは、 i_x, i_y より次のように表される。

$$i_r = i_x \cos q + i_y \sin q, \quad i_q = -i_x \sin q + i_y \cos q \quad (14)$$

この単位ベクトルを用いて ds を表現すれば、

$$ds = dr i_r + r dq i_q \quad (15)$$

となる。この式と式(13)を比較すると、デカルト座標系の場合には、基準となるベクトルと各座標系成分の積で与えられているのに対して、極座標系では q 方向の成分中に r が混入していることが解る。そこで、次のようなベクトルを導入する。

$$g_r = i_r, \quad g_q = r i_q \quad (16)$$

これを用いて ds を再度表現すると、

$$ds = dr g_r + dq g_q \quad (17)$$

となり、デカルト座標系での表示(式(13))と同様の表現となる。 g_r, g_q を極座標系における共変基底ベクトルと呼ぶ。

もはやこの基底ベクトル g_q は単位ベクトルではなく、大きさ r を有するベクトルであることに注意すべきである。

る。

以上のことから、任意の座標系(dx^1, dx^2, dx^3)における基底ベクトルは、微小線要素 ds を次式で表現するためのベクトルである、と定義される。

$$ds = dx^1 g_1 + dx^2 g_2 + dx^3 g_3 = \sum_{i=1}^3 dx^i g_i \quad (18)$$

これより、共変基底ベクトルの正式な定義、次式が得られる。

$$g_i = \frac{\partial s}{\partial x^i} \quad (19)$$

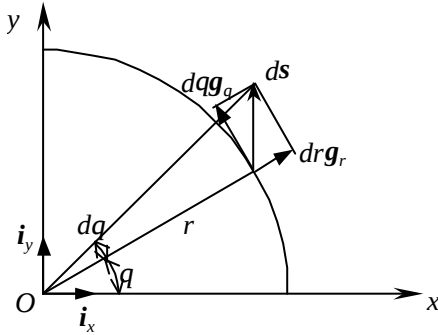
さらに式(13)の表現の重要な点は ds の x 座標系成分は ds と i_x のスカラー積を取ることによって得られるという点である。すなわち、 dx は、

$$ds \cdot i_x = (dx i_x + dy i_y) \cdot i_x = dx \quad \because i_m \cdot i_n = d_{mn} \quad (18)$$

として求められる。しかしながら、式(17)の表現ではこのような結果は得られない。

$$ds \cdot g_q = (dr g_r + dq g_q) \cdot g_q = r^2 dq \neq dq \quad \because g_q \cdot g_q = r^2 \neq 1 \quad (19)$$

このために、反変基底ベクトル g^r, g^q を導入するのである。これは前述したようにこの共変基底ベクトル



と直交関係にあるベクトル群として定義される。すなわち、

$$\mathbf{g}^j \cdot \mathbf{g}_i = d_i^j \quad (20)$$

これより、 ds の q 座標系成分は ds と $\mathbf{g}^q$ のスカラー積を取ることによって得られることになり、式(13)と相似な関係が極座標系においても成り立つことになる。

$$ds \cdot \mathbf{g}^q = (dr \mathbf{g}_r + dq \mathbf{g}_q) \cdot \mathbf{g}^q = dq \quad (21)$$

テンソル解析における最も感覚的に馴染まない点は、デカルト座標系においては任意のベクトルが式(13)の形で表現されることによる。この使い慣れた優れた座標系では、単に方向のみを示す単位ベクトルとその方向の大きさを示す座標系成分の積によってベクトルを記述できるために、物理的な大きさはすべて成分にのみ持たせることができるという点である。それに対してテンソル記述された式における基底ベクトルは、単純な方向のみを示すベクトルではなく、物理的な大きさをも有しているのである。逆に言うならば、座標系成分は物理的な意味を有していないのである。この点が最も理解を困難にする点である。

そこで、基底ベクトルがどのような大きさを有しているかを明らかにするために、通常計量テンソルと呼ばれるものが用いられる。計量テンソルの定義は、

$$\mathbf{g}_i = g_{ij} \mathbf{g}^j \quad (22)$$

で与えられる。(これはより具体的に表現すれば、 $\mathbf{g}_i = \sum_{j=1}^3 g_{ij} \mathbf{g}^j$ であるが、アインシュタインの総和規約によりテンソル解析では総和記号は省略される。) この両辺に $\mathbf{g}_k$ を乗ずることにより次式が得られる。

$$\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_k = g_{ij} \mathbf{g}^j \cdot \mathbf{g}_k = g_{ij} d_k^j = g_{ik} \quad (23)$$

この式の意味は明らかであり、計量テンソルは共変基底ベクトルの大きさ（正確には大きさの2乗）を意味している。さらにこの式から $g_{ij} = g_{ji}$ ということも明らかである。

またこの計量テンソルの反変成分は、式(22)の両辺に $\mathbf{g}^k$ を乗じて、

$$\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}^k = g_{ij} \mathbf{g}^j \cdot \mathbf{g}^k = g_{ij} g^{jk} \Rightarrow d_i^k \quad (24)$$

という関係から求めることができる。