# 構造力学実験
# C 振動

# 振動に関する理論背景

平成 18年 10 月12日

# 目次

1．1 質点 1 自由度系の自由振動 ------ p.2
1.1　振動の形態 ------ p.3
(1) $h^2-1>0$ の場合
(2) $h^2-1=0$ の場合
(3) $h^2-1<0$ の場合
1.2　減衰自由振動 ------ p.4
2．Bernoulli-Euler 梁の曲げ振動 ------ p.6
2.1　一様な片持ち梁の曲げ振動 ------ p.6
2.2　自由端に集中質量をもつ片持ち梁の曲げ振動 ------ p.7
3.　エネルギー法（Rayleigh-Ritz の方法）による固有振動数の近似解法 ------ p.9
3.1　一様な片持ち梁の曲げ振動 ------ p.9
（1）集中荷重 $P$ が自由端に作用したときのたわみ曲線を用いる場合 ------ p.9
（2）等分布荷重 $p$ が作用したときのたわみ曲線を用いる場合 ------ p.9
3.2　一様な片持ち梁の高さ $0.9l$（自由端より $0.1l$）におもりを付加した場合------ p.10
（1）集中荷重 $P$ が自由端に作用したときのたわみ曲線を用いた場合 ------ p.10
（2）等分布荷重 $p$ が作用したときのたわみ曲線を用いた場合 ------ p.11
4．1 質点ばね系への近似 ------ p.11
5．地動による強制振動 ------ p.12
5.1　運動方程式 ------ p.12
5.2　調和地動加振 ------ p.13
<u>予習のポイント</u> ------ p.16

# 構造力学実験　振動論

## 1．1 質点 1 自由度系の自由振動

### 1.1　振動の形態

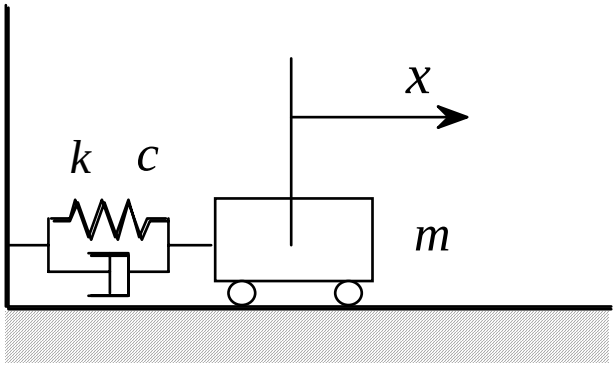


図 1.1　1 質点 1 自由度系

図 1.1 に示すような 1 質点 1 自由度系の自由振動を考える．図 1.1 の座標系のもとで，質点が $x$ だけ変位したとすると，質点に作用する力は，慣性力 $-m\ddot{x}$，ばねの復元力 $-kx$，ダッシュポットの粘性抵抗力 $-c\dot{x}$ であるから，運動方程式は次式のようになる（注1）．

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \tag{1.1}$$

ここで，$m$ ：質量，$c$ ：減衰係数，$k$ ：ばね定数である．

式(1.1)の両辺を質量 $m$ で割ると，

$$\ddot{x} + 2h\overline{\omega}\dot{x} + \overline{\omega}^2 x = 0 \tag{1.2}$$

ここで，$\overline{\omega}$ ：非減衰固有円振動数，$h$ ：減衰定数で，

$$\overline{\omega} = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{1.3}$$

$$h = \frac{c}{2m\overline{\omega}} \tag{1.4}$$

である．

式(1.2)は同次定係数線形 2 階常微分方程式であり，この型の微分方程式の解は 2 個の 1 次独立な解を持つため，一般解は次式のように与えられる（注2）．

$$x = C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t} \tag{1.5}$$

ここで，$C_1$ および $C_2$ は積分定数で，時刻 $t = 0$ における初期条件から以下の通り求められる．

$$p_{1,2} = -h\overline{\omega} \pm \overline{\omega}\sqrt{h^2 - 1} \tag{1.6}$$

式(1.6)の根号内の値 $h^2 - 1$ が正，0，負の 3 つの場合で系の運動は大きく異なる．ここでは，それぞれの場合について説明する．

**(1)　$h^2 - 1 > 0$ の場合**

時刻 $t = 0$ における初期変位を $x_0$，初速度を $\dot{x}_0$ とすると，式(1.5)の一般解は以下の通り（注意3）である．

$$x = x_0 e^{-h\overline{\omega}t}\left(\cosh\sqrt{h^2 - 1}\overline{\omega}t + \frac{h + \dot{x}_0/\overline{\omega}x_0}{\sqrt{h^2 - 1}}\sinh\sqrt{h^2 - 1}\overline{\omega}t\right) \tag{1.7}$$

これは，正負の振幅を繰り返す振動現象を示すことはなく，運動は非周期的となる（注意4）．

$h^2-1>0$ となる条件は式(1.3)および式(1.4)によると，

$$\left(\frac{c}{2m}\right)^2 > \frac{k}{m} \tag{1.8}$$

となり，式(1.8)は物理的にばねによる復元力（以下，ばね力）よりもダッシュポットによる粘性抵抗力（以下，減衰力）が強いことを意味する．このような減衰状態を過減衰と呼ぶ.

**(2)** $h^2-1=0$ **の場合**

（1）と同じ初期条件とすると，式(1.5)の一般解は以下の通りとなる（注意３）.

$$x = x_0\left[1+(1+\frac{\dot{x}_0}{\overline{\omega}x_0})\overline{\omega}t\right]e^{-\overline{\omega}t} \tag{1.9}$$

この場合の運動も非周期的であり（注意４），$h^2-1=0$ となる条件は式(1.3)および式(1.4)によると，

$$\left(\frac{c}{2m}\right)^2 = \frac{k}{m} \tag{1.10}$$

であり，ばね力と減衰力が釣り合っていることを意味し，振動現象を示すか示さないかの境界にあたる．このような境界にあたる状態の減衰を臨界減衰と呼ぶ．臨界減衰状態の減衰係数，すなわち臨界減衰係数を $c_{cr}$ とすれば，式(1.10)より，

$$c_{cr} = 2\sqrt{mk} \tag{1.11}$$

となる.

**(3)** $h^2-1<0$ **の場合**

（1）と同じ初期条件とすると，式(1.5)の一般解は（注意３）

$$x = e^{-h\overline{\omega}t}(x_0\cos\sqrt{1-h^2}\,\overline{\omega}t + \frac{hx_0+\dot{x}_0/\overline{\omega}}{\sqrt{1-h^2}}\sin\sqrt{1-h^2}\,\overline{\omega}t) \tag{1.12}$$

あるいは,

$$x = Xe^{-h\overline{\omega}t}\cos(\sqrt{1-h^2}\,\overline{\omega}t+\phi) \tag{1.13}$$

である．ここで，$X$ および $\phi$ は次式の通りである.

$$X = x_0\sqrt{1+\frac{(h+\dot{x}_0/\overline{\omega}x_0)^2}{1-h^2}} \tag{1.14}$$

$$\phi = \arctan\left[-\frac{h+\dot{x}_0/\overline{\omega}x_0}{\sqrt{1-h^2}}\right] \tag{1.15}$$

式(1.12)には，$\cos\sqrt{1-h^2}\,\overline{\omega}t$ および $\sin\sqrt{1-h^2}\,\overline{\omega}t$ という調和振動の項が含まれているため，周期的な運動となり（注意４），式(1.3)および式(1.4)によると，

$$\left(\frac{c}{2m}\right)^2 < \frac{k}{m} \tag{1.16}$$

となり，ばね力に比べて減衰力が小さい状態を表している．このような系の周期的な運動を減衰運動と呼ぶ.

## 1.2　減衰自由振動

通常の構造物では，過減衰あるいは臨界減衰を示すものはなく，減衰定数 $h$ は 1 に比べるとかなり小さい.

$$h << 1 \tag{1.17}$$

したがって，ここでは，$h^2 - 1 < 0$ の場合に着目する．

初期条件が $x_0 = x_0$，$\dot{x}_0 = 0$ の場合，式(1.12)の変位の時刻歴は

$$x = x_0 e^{-h\overline{\omega}t}(\cos\sqrt{1-h^2}\,\overline{\omega}t + \frac{h}{\sqrt{1-h^2}}\sin\sqrt{1-h^2}\,\overline{\omega}t) \tag{1.18}$$

あるいは，式(1.13)～(1.15)より

$$x = \frac{x_0}{\sqrt{1-h^2}} e^{-h\overline{\omega}t}\cos(\sqrt{1-h^2}\,\overline{\omega}t + \phi) \tag{1.19}$$

ここで，

$$\phi = \arctan\left[-\frac{h}{\sqrt{1-h^2}}\right] \tag{1.20}$$

式(1.18)の振動曲線を図示すると図 1.2 のようになる（注意４）．また，式(1.18)より質点の速度は，

$$\dot{x} = -\frac{\overline{\omega}x_0}{\sqrt{1-h^2}} e^{-h\overline{\omega}t}\sin\sqrt{1-h^2}\,\overline{\omega}t \tag{1.21}$$

となり，図 1.2 の振動曲線のピークは速度が 0，すなわち

$$\sin\sqrt{1-h^2}\,\overline{\omega}t = 0 \tag{1.22}$$

となる時刻ごとに現れ，式(1.22)を満足する $t$ を $t_m$ とすると，

$$\overline{\omega}t_m = \frac{2m\pi}{\sqrt{1-h^2}} \qquad m = 0, 1, 2\cdots \tag{1.23}$$

よって，相隣るピーク間の時間間隔，すなわち減衰固有周期 $T$ は

$$T = \frac{2\pi}{\overline{\omega}\sqrt{1-h^2}} \tag{1.24}$$

式(1.23)を式(1.18)に代入すれば，ピーク振幅 $x_m$ は

$$x_m = x_0 e^{-2m\pi h/\sqrt{1-h^2}} \qquad m = 0, 1, 2\cdots \tag{1.25}$$

となる．式(1.25)のピークより $n$ サイクル目のピーク振幅 $x_{m+n}$ は

$$x_{m+n} = x_0 e^{-2(m+n)\pi h/\sqrt{1-h^2}} \tag{1.26}$$

となり，式(1.25)と式(1.26)の比をとると，

$$\frac{x_m}{x_{m+n}} = e^{n2\pi h/\sqrt{1-h^2}} \tag{1.27}$$

ここで，式(1.27)の両辺の自然対数をとり，さらにそれを 2 つのピーク間のサイクル数 $n$ で割った値 $\delta$ を対数減衰率と呼ぶ.

$$\delta = \frac{1}{n}\ln(\frac{x_m}{x_{m+n}}) = \frac{2\pi h}{\sqrt{1-h^2}} \tag{1.28}$$

式(1.28)において減衰定数 $h$ が 1 に比べてかなり小さいときには，

$$\delta \approx 2\pi h \tag{1.29}$$

と近似して差し支えない.

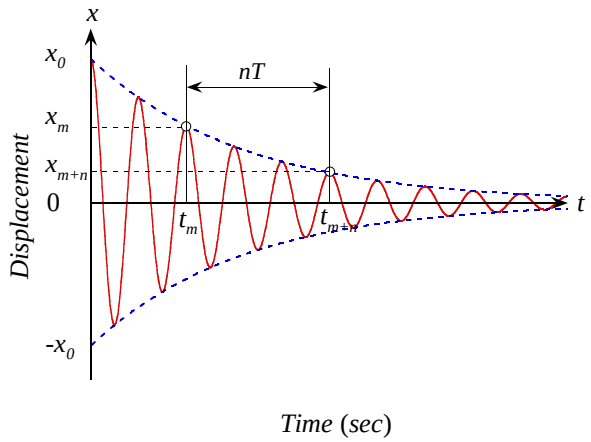


図 1.2　減衰自由振動：初期条件 $x(0) = x_0$，　$\dot{x}(0) = 0$ [1)]

## 2. Bernoulli-Euler 梁の曲げ振動

### 2.1　一様な片持ち梁の曲げ振動

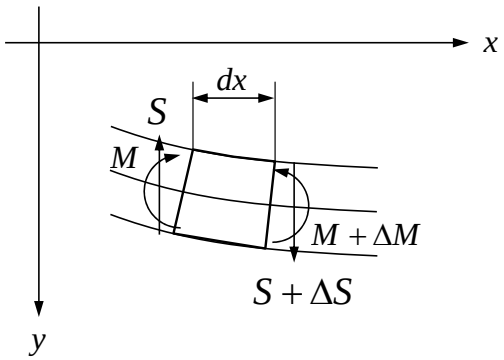


図 2.1　梁の曲げ振動

図 2.1 に示す梁の曲げ振動の基礎方程式は，（注意２，５，６）

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \tag{2.1}$$

ここでは，梁の弾性係数 $E$，断面 2 次モーメント $I$，単位体積質量 $\rho$，断面積 $A$ を用いて，

$$v^2 = \frac{EI}{\rho A} \tag{2.2}$$

式(2.1)の解は

$$y = X(x)e^{-i\omega t} \tag{2.3}$$

の形で与えられ，式(2.3)を式(2.1)に代入すると，

$$\frac{d^4 X}{dx^4} - \frac{\omega^2}{v^2}X = 0 \tag{2.4}$$

のように変数分離できる．よって，式(2.4)の一般解は次式で与えられる（注意２）．

$$X = C_1 \cos\lambda x + C_2 \sin\lambda x + C_3 \cosh\lambda x + C_4 \sinh\lambda x \tag{2.5}$$

ここで，

$$\lambda^4 = \frac{\omega^2}{v^2} \tag{2.6}$$

片持ち梁の境界条件は，固定端でたわみと回転角が 0，自由端で曲げモーメント $M$ とせん断力 $S$ が 0 であるから，以下のようになる．

$$\begin{aligned} x = 0 \quad & X = 0, \frac{dX}{dx} = 0 \\ x = l \quad & \frac{d^2 X}{dx^2} = 0, \frac{d^3 X}{dx^3} = 0 \end{aligned} \tag{2.7}$$

これらの条件より，次のような関係式が得られる．

$$\cos\lambda l \cdot \cosh\lambda l = -1 \tag{2.8}$$

式(2.8)は，固有円振動数 $\omega_s$ を決定づけるための方程式で特性方程式あるいは振動数方程式と呼ばれる．式(2.8)を満足する $\lambda l$ を求めると，表 2.1 のようになり，固有円振動数 $\omega_s$ は式(2.2)，(2.6)より

$$\omega_s = v\lambda_s^2 = (\frac{\lambda_s l}{l})^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \tag{2.9}$$

となる．よって，1 次，2 次の固有円振動数 $\omega_1$，$\omega_2$ は，

$$\omega_1 = \left(\frac{1.8751}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \tag{2.10}$$

$$\omega_2 = \left(\frac{4.6941}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \tag{2.11}$$

となる．式(2.10)，(2.11)より 1 次，2 次の固有円振動数 $\omega_i$ と固有振動数 $f_i$ を求めることができる．

表 2.1　片持ち梁の曲げ振動の固有値

| 次数 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $\lambda_s l$ | 1.875 | 4.694 | 7.855 |

## 2.2　自由端に集中質量をもつ片持ち梁の曲げ振動

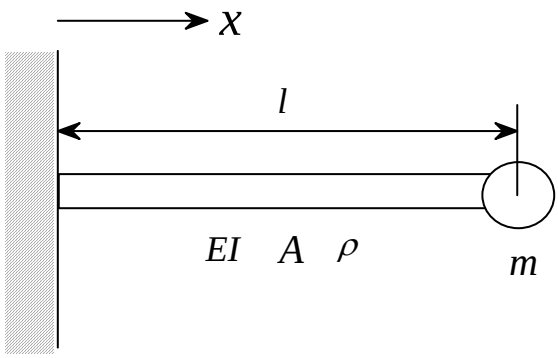


図 2.2　自由端に集中質量を持つ片持ち梁

図 2.2 に示すように自由端に集中質量 $m$ をもつ片持ち梁を考えると，境界条件は次式で与えられる．

$$\begin{aligned} x = 0 \quad & X = 0, \frac{dX}{dx} = 0 \\ x = l \quad & \frac{d^2X}{dx^2} = 0, S = -m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \end{aligned} \tag{2.12}$$

式(2.12)の $x = l$ の第 2 の条件は次のように変形できる．

$$-EI\frac{d^3X}{dx^3} = m\omega^2 X \tag{2.13}$$

これらの条件より，集中質量と片持ち梁の全質量の比 $\gamma$ を

$$\gamma \equiv \frac{m}{\rho A l} \tag{2.14}$$

と定義すると，振動数方程式は次のように与えられる．

$$\gamma\lambda l = \frac{1 + \cos\lambda l \cdot \cosh\lambda l}{\sin\lambda l \cdot \cosh\lambda l - \cos\lambda l \cdot \sinh\lambda l} \tag{2.15}$$

集中質量が片持ち梁の全質量に等しいとすると（$\gamma = 1$），式(2.15)を満足する $\lambda l$ は表 2.2 の

ようになり，式(2.9)より，1 次，2 次の固有円振動数 $\omega_1$，$\omega_2$ を求めると

$$\omega_1 = \left(\frac{1.248}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \tag{2.16}$$

$$\omega_2 = \left(\frac{3.927}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \tag{2.17}$$

表 2.2　集中質量を有する片持ち梁の曲げ振動の固有値

| 次数 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $\lambda_s l$ | 1.248 | 3.927 | 4.031 |

## 3.　エネルギー法（Rayleigh-Ritz の方法）による固有振動数の近似解法

### 3.1　一様な片持ち梁の曲げ振動

（1）集中荷重 $P$ が自由端に作用したときのたわみ曲線を用いる場合

自由端に集中荷重 $P$ が作用した場合の片持ち梁の静的たわみ $X$ は

$$X = \frac{Pl^3}{3EI}\left\{1 - \frac{3}{2}\left(\frac{x}{l}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{l}\right)^3\right\} \tag{3.1}$$

運動エネルギーの最大値 $K_{\max}$ は

$$K_{\max} = \frac{\rho A}{2}\int_0^l (\omega X)^2 dx = \frac{11}{840}\frac{\rho A \omega^2 P^2 l^7}{E^2 I^2} \tag{3.2}$$

一方，ひずみエネルギーの最大値 $V_{\max}$ は

$$V_{\max} = \frac{1}{2}EI\int_0^l \left(\frac{d^2 X}{dx^2}\right)^2 dx = \frac{P^2 l^3}{6EI} \tag{3.3}$$

よって，$K_{\max} = V_{\max}$ より

$$\omega = \left(\frac{\sqrt[4]{140/11}}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \cong \left(\frac{1.889}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \tag{3.4}$$

ここでは，実験供試体の弾性係数 $E$，断面 2 次モーメント $I$，単位体積質量 $\rho$，断面積 $A$ を用いて，式(3.4)より 1 次の固有円振動数 $\omega_1$ と固有振動数 $f_1$ を求める．

（2）等分布荷重 $p$ が作用したときのたわみ曲線を用いる場合

等分布荷重 $p$ が作用した場合の片持ち梁の静的たわみ $X$ は

$$X = \frac{pl^4}{8EI}\left\{1 - \frac{4}{3}\left(\frac{x}{l}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{l}\right)^4\right\} \tag{3.5}$$

運動エネルギーの最大値 $K_{\max}$ は

$$K_{\max} = \frac{\rho A}{2}\int_0^l (\omega X)^2 dx = \frac{13}{6480}\frac{\rho A \omega^2 p^2 l^9}{E^2 I^2} \tag{3.6}$$

一方，ひずみエネルギーの最大値 $V_{\max}$ は

$$V_{\max} = \frac{1}{2}EI\int_0^l \left(\frac{d^2 X}{dx^2}\right)^2 dx = \frac{p^2 l^5}{40EI} \tag{3.7}$$

よって，$K_{\max} = V_{\max}$ より

$$\omega = \left(\frac{\sqrt[4]{162/13}}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \cong \left(\frac{1.8789}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \tag{3.8}$$

集中荷重 $P$ が作用したときと同様に，実験供試体の弾性係数 $E$，断面 2 次モーメント $I$，単位体積質量 $\rho$，断面積 $A$ を用いて，式(3.8)より 1 次の固有円振動数 $\omega_1$ と固有振動数 $f_1$ を求める．

### 3.2　一様な片持ち梁の高さ $0.9l$（自由端より $0.1l$）におもりを付加した場合

（1）集中荷重 $P$ が自由端に作用したときのたわみ曲線を用いた場合

自由端に集中荷重 $P$ が作用した場合の片持ち梁の静的たわみ $X$ は式(3.1)と同様に

$$X = \frac{Pl^3}{3EI}\left\{1 - \frac{3}{2}\left(\frac{x}{l}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{l}\right)^3\right\} \tag{3.9}$$

自由端より $0.1l$ のところのたわみ $X(0.1l)$ は

$$X(0.1l) = \frac{1701Pl^3}{6000EI} \tag{3.10}$$

運動エネルギーの最大値 $K_{\max}$ は，付加するおもりの重量を $W$，重力加速度を $g$ とすると，

$$K_{\max} = \frac{\rho A}{2}\int_0^l (\omega X)^2 dx + \frac{1}{2}\frac{W}{g}\left(\omega X\left(0.1l\right)\right)^2 = \frac{11}{840}\frac{\rho A\omega^2 P^2 l^7}{E^2 I^2} + \frac{1}{2}\frac{W}{g}\frac{2893401\omega^2 P^2 l^6}{36000000E^2 I^2} \tag{3.11}$$

一方，ひずみエネルギーの最大値 $V_{\max}$ は式(3.3)と同様に

$$V_{\max} = \frac{1}{2}EI\int_0^l \left(\frac{d^2X}{dx^2}\right)^2 dx = \frac{P^2 l^3}{6EI} \tag{3.12}$$

$K_{\max} = V_{\max}$ の関係を用いて，実験供試体の弾性係数 $E$，断面 2 次モーメント $I$，単位体積質量 $\rho$，断面積 $A$ を代入して，1 次の固有円振動数 $\omega_1$ と固有振動数 $f_1$ を求める．

（2）等分布荷重 $p$ が作用したときのたわみ曲線を用いた場合

等分布荷重 $p$ が作用した場合の片持ち梁の静的たわみ $X$ は式(3.5)と同様に

$$X = \frac{pl^4}{8EI}\left\{1 - \frac{4}{3}\left(\frac{x}{l}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{l}\right)^4\right\} \tag{3.13}$$

自由端より $0.1l$ のところのたわみ $X(0.1l)$ は

$$X(0.1l) = \frac{26001pl^4}{240000EI} \tag{3.14}$$

運動エネルギーの最大値 $K_{\max}$ は，付加するおもりの重量を $W$，重力加速度を $g$ とすると，

$$K_{\max} = \frac{\rho A}{2}\int_0^l (\omega X)^2 dx + \frac{1}{2}\frac{W}{g}\left(\omega X\left(0.1l\right)\right)^2 \tag{3.15}$$

一方，ひずみエネルギーの最大値 $V_{\max}$ は式(3.7)と同様に

$$V_{\max} = \frac{1}{2}EI\int_0^l \left(\frac{d^2X}{dx^2}\right)^2 dx = \frac{p^2 l^5}{40EI} \tag{3.16}$$

$K_{\max} = V_{\max}$ の関係を用いて，実験供試体の弾性係数 $E$，断面 2 次モーメント $I$，単位体積質量 $\rho$，断面積 $A$ を代入して，1 次の固有円振動数 $\omega_1$ と固有振動数 $f_1$ を求める．

## 4．1 質点ばね系への近似

図 4.1 に示すように自由端に集中荷重 $P$ を作用させた場合のたわみ $\delta$ は

$$\delta = \frac{Pl^3}{3EI} \tag{4.1}$$

よって，片持ち梁を 1 つの等価なばねで置き換えた場合のばね定数 $k$ は

$$k = \frac{P}{\delta} = \frac{3EI}{l^3} \tag{4.2}$$

ゆえに，固有振動数 $f$ は次式により求められる．

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3EIg}{Wl^3}} \tag{4.3}$$

ここで，式(4.3)における $W$ は片持ち梁を1質点に置き換えたときの等価な重量で，この $W$ を片持ち梁の全重量に対してどの程度に設定するかは各自いろいろと試してみること．

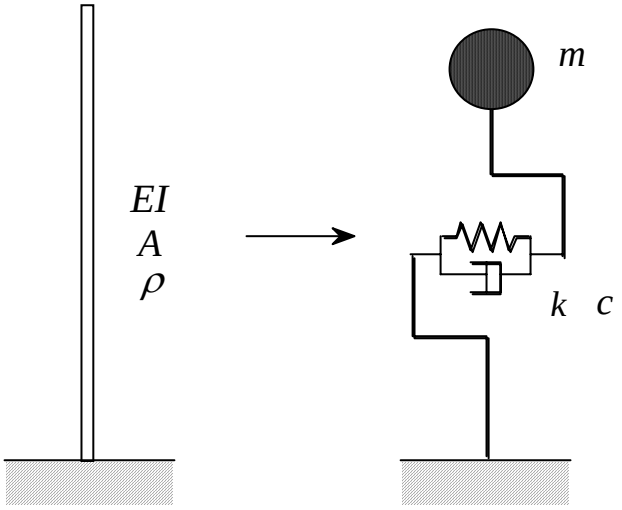


図 4.1　1 質点はね系への近似

## 5．地動による強制振動

### 5.1　運動方程式

地動加振を受ける1質点減衰系のモデルを図5.1に示す．図5.1において，$y$ は空間に固定した軸から測った地動の変位，$x$ はベースに対する相対変位である．したがって，質点の絶対変位を $\xi$ とすれば，$\xi = x + y$ となる．したがって，質点の絶対加速度は $\ddot{\xi} = \ddot{x} + \ddot{y}$ となり，質点に作用する慣性力は $-m(\ddot{x} + \ddot{y})$ であるから，運動方程式は，

$$m(\ddot{x} + \ddot{y}) + c\dot{x} + kx = 0 \tag{5.1}$$

となる．式(6.1)は

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = -m\ddot{y} \tag{5.2}$$

と書き換えることができ，さらに両辺を $m$ で除すると，

$$\ddot{x} + 2h\overline{\omega}\dot{x} + \overline{\omega}^2 x = -\ddot{y} \tag{5.3}$$

となる．ここで，$\overline{\omega}$ ：非減衰固有円振動数，$h$ ：減衰定数で

$$\overline{\omega} = \sqrt{\frac{k}{m}}, \qquad h = \frac{c}{2\sqrt{m \cdot k}} \tag{5.4}$$

である．

式(5.2)の右辺は時間に関する既知の関数であるから，系が地動加振される場合の質点の相対変位は，ベースを不動として，系に対して地動による慣性力 $-m\ddot{y}$ を加振力として与えた場合の変位に等しい．すなわち，図5.1に示した系は図5.2に示した系と等価である．式(5.1)から式(5.2)への書き換えは，数学的には単なる移項に過ぎないが，地動加振の問題を，質点

に直接加振力が作用する強制振動の問題に還元するという意味で物理的に重要である．

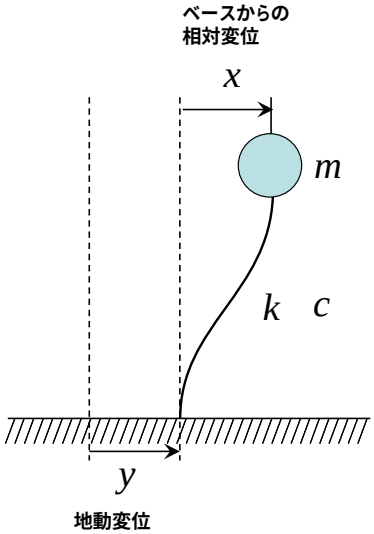


図 5.1　地震加振を受ける 1 質点減衰系

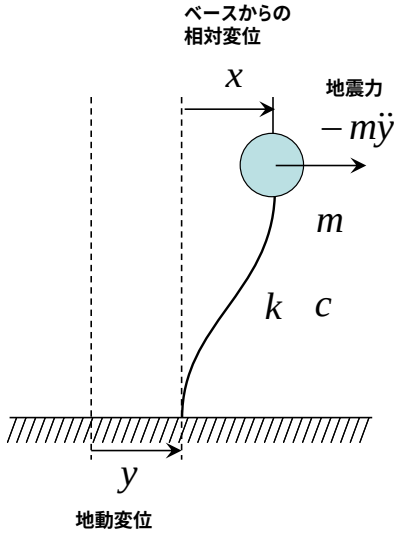


図 5.2　地震加振時の等価な加振力

## 5.2　調和地動加振

地動を調和振動とし，その変位，速度，加速度を

$$
\begin{aligned}
y &= ae^{i\omega t} \\
\dot{y} &= i\omega a e^{i\omega t} \\
\ddot{y} &= -\omega^2 a e^{i\omega t}
\end{aligned}
\tag{5.5}
$$

ここに，$a$：地動の変位振幅，$\omega$：地動の円振動数である．式(6.5)を式(6.3)に代入すると，

$$\ddot{x} + 2h\overline{\omega}\dot{x} + \overline{\omega}^2 x = \omega^2 a e^{i\omega t} \tag{5.6}$$

微分方程式(5.6)の一般解は，自由振動解に相当する余関数と定常振動を表す特解からなる．地動が調和振動の場合には，自由振動は減衰によって振動を始めてから間もなく消滅するため，ここでは，定常振動を示す特解のみに着目する．特解を求めるためには，$\widehat{X}$ を複素振幅として，

$$x = \widehat{X} e^{i\omega t} \tag{5.7}$$

とおき，式(5.6)に代入して整理すると，

$$\widehat{X} = \frac{\omega^2 a}{\overline{\omega}^2 - \omega^2 + 2ih\overline{\omega}\omega} \tag{5.8}$$

ここで，

$$\frac{1}{\alpha + i\beta} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} e^{-i\theta}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$$

の関係を用いて，式(5.8)を書き換えると，

$$
\begin{aligned}
\widehat{X} &= \frac{\omega^2 a}{\sqrt{\left(\overline{\omega}^2 - \omega^2\right)^2 + \left(2h\overline{\omega}\omega\right)^2}} e^{-i\phi} \\
\phi &= \arctan\left(\frac{2h\overline{\omega}\omega}{\overline{\omega}^2 - \omega^2}\right)
\end{aligned}
\tag{5.9}
$$

となり，式(5.7)は

$$x = \frac{\omega^2 a}{\sqrt{\left(\overline{\omega}^2 - \omega^2\right)^2 + \left(2h\overline{\omega}\omega\right)^2}} e^{i(\omega t - \phi)} \tag{5.10}$$

となる．式(5.10)の変位振幅 $X$ は

$$X = \frac{\omega^2 a}{\overline{\omega}^2} \frac{1}{\sqrt{\left(1-\left(\omega/\overline{\omega}\right)^2\right)^2 + \left(2h\left(\omega/\overline{\omega}\right)\right)^2}} = \frac{m\left(\omega^2 a\right)}{k} \frac{1}{\sqrt{\left(1-\left(\omega/\overline{\omega}\right)^2\right)^2 + \left(2h\left(\omega/\overline{\omega}\right)\right)^2}} \tag{5.11}$$

と書き換えられ，$m\left(\omega^2 a\right)/k$ は加振振幅 $P_0 = m\left(\omega^2 a\right)$ による質点の静的変位 $X_s$ であるから，式(5.11)を変形して動的増幅率 $\mu$ は

$$\mu = \frac{X}{X_s} = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\left(\omega/\overline{\omega}\right)^2\right)^2 + \left(2h\left(\omega/\overline{\omega}\right)\right)^2}} \tag{5.12}$$

となる．

ここで，式(5.5)と式(5.7)より，質点の絶対変位 $\xi$ は，

$$\xi = x + y = \frac{a\left(\overline{\omega}^2 + 2ih\overline{\omega}\omega\right)}{\overline{\omega}^2 - \omega^2 + 2ih\overline{\omega}\omega} e^{i\omega t} \tag{5.13}$$

となるため，質点の絶対加速度 $\ddot{\xi}$ は

$$\ddot{\xi} = -\frac{\omega^2 a\left(\overline{\omega}^2 + 2ih\overline{\omega}\omega\right)}{\overline{\omega}^2 - \omega^2 + 2ih\overline{\omega}\omega} e^{i\omega t} \tag{5.14}$$

よって，質点の絶対加速度 $\ddot{\xi}$ と地動加速度 $\ddot{y}$ の比は，

$$\begin{aligned} \frac{\ddot{\xi}}{\ddot{y}} &= \frac{\overline{\omega}^2 + 2ih\overline{\omega}\omega}{\overline{\omega}^2 - \omega^2 + 2ih\overline{\omega}\omega} = \sqrt{\frac{1 + 4h^2\left(\omega/\overline{\omega}\right)^2}{\left(1-\left(\omega/\overline{\omega}\right)^2\right)^2 + 4h^2\left(\omega/\overline{\omega}\right)^2}} e^{-i\phi} \\ \phi &= \arctan\left(\frac{2h\left(\omega/\overline{\omega}\right)^3}{1-\left(\omega/\overline{\omega}\right)^2 + 4h^2\left(\omega/\overline{\omega}\right)^2}\right) \end{aligned} \tag{5.15}$$

となる．調和地動加振を受けた質点の絶対加速度と地動加速度の振幅比を加速度応答倍率といい，以下の式で表される．

$$\left|\frac{\ddot{\xi}}{\ddot{y}}\right| = \sqrt{\frac{1 + 4h^2\left(\omega/\overline{\omega}\right)^2}{\left(1-\left(\omega/\overline{\omega}\right)^2\right)^2 + 4h^2\left(\omega/\overline{\omega}\right)^2}} \tag{5.16}$$

同様にして，質点に生じる変位と地動変位および質点に生じる速度と地動速度の振幅比をとって，それぞれ変位応答倍率および速度応答倍率を定義することも可能である．これらの加速度・速度・変位応答倍率を総称して，応答倍率あるいは伝達率と呼ぶ.

式(5.16)で与えられた加速度応答倍率は，減衰定数 $h$ をパラメータとして振動数比 $\omega/\overline{\omega}$ の関数であるから，それらの関係を図示すると図 5.3 のようになる．加速度応答倍率がピークとなる振動数比 $\omega/\overline{\omega}$ は，式(5.16)の $\omega/\overline{\omega}$ に対する微分をゼロを置くことによって求められ，

$$\frac{\omega}{\overline{\omega}} = \sqrt{\frac{2}{1+\sqrt{1+8h^2}}} \tag{5.17}$$

となる．通常の構造物では減衰定数 $h$ は $h << 1$ であるから，式(5.17)は

$$\frac{\omega}{\overline{\omega}} \approx 1 \tag{5.18}$$

と近似的に求められる．また，加速度応答倍率のピーク値は，式(6.17)を式(6.16)に代入して，

$$\left|\frac{\ddot{\xi}}{\ddot{y}}\right|_{\max} = \sqrt{\frac{\sqrt{1+8h^2}+4h^2+1}{\sqrt{1+8h^2}+4h^2-1}} \tag{5.19}$$

と表され，$h \ll 1$を考慮すると，

$$\left|\frac{\ddot{\xi}}{\ddot{y}}\right|_{\max} \approx \frac{1}{2h} \tag{5.20}$$

となる．

式(5.16)において，$\left|\ddot{\xi}/\ddot{y}\right| = 1$となる振動数比$\omega/\overline{\omega}$を求めると，$\omega/\overline{\omega} = 0$あるいは$\omega/\overline{\omega} = \sqrt{2}$となる．図5.3よりわかるように，$\omega/\overline{\omega} = \sqrt{2}$では減衰定数$h$の値にかかわらず加速度応答倍率はすべて 1 であり，$\omega/\overline{\omega} > \sqrt{2}$の範囲では加速度応答倍率は常に 1 よりも小，すなわち応答加速度のほうが地動加速度よりも小さくなる．

また，図5.4は式(5.15)の角度$\phi$と振動数比$\omega/\overline{\omega}$の関係を図示したものであるが，これは地動加速度ベクトルと質点の絶対加速度ベクトルとの間の位相ずれを示すものである．

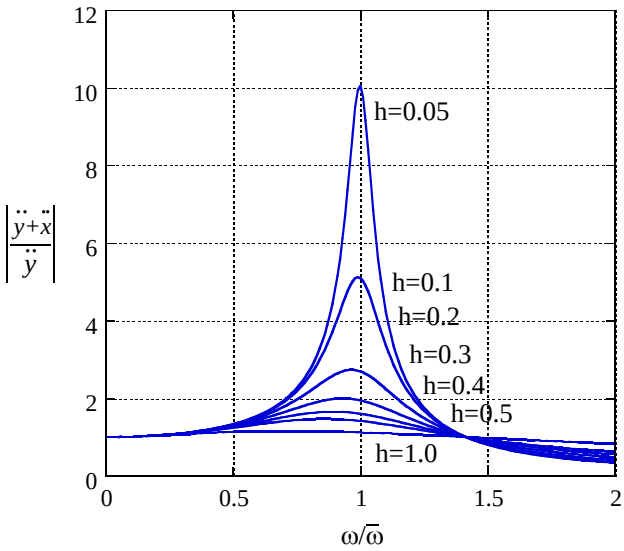


図 5.3　加速度応答倍率（共振曲線）[1)]

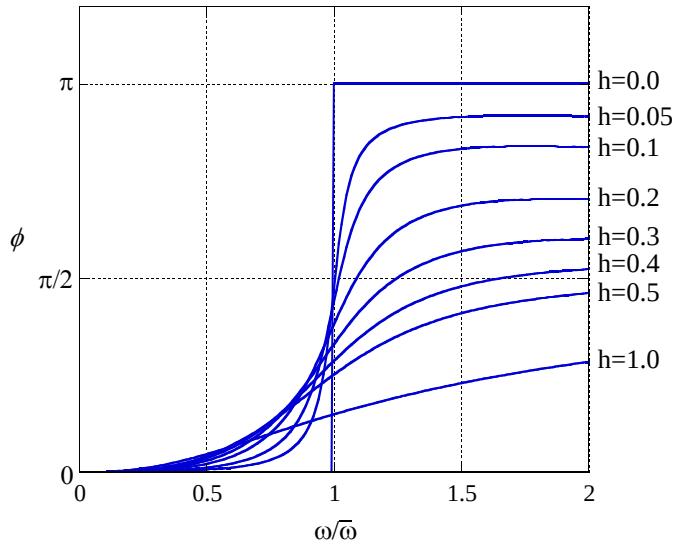


図 5.4　地動加速度と応答（絶対）加速度の位相ずれ [1)]

予習のポイント（注釈の意味）

注意１：　慣性力，減衰力，復元力が図 1.1 のどちら向きに，どれだけ作用しているか各自で確認すること．また，運動方程式を力のつり合いにより求める方法と Newton の第二法則から求める方法の二通りあることを確認すること
注意２：　独立な解が２つあることを示せ
注意３：　一般解がこの様になることを確認せよ
注意４：　どのような関数となるか，グラフを書いて確認すること
注意５：　微分方程式の導出は各自で行うこと
注意６：　曲げモーメントおよびせん断力の正の向きがどちらか？，慣性力の向きはどちらか？説明できますか？

参考文献

1）大崎順彦：振動理論，建築構造学大系 24，彰国社，1980
2）小坪清真：土木振動学，森林出版，1992
3）柴田明徳：最新耐震構造解析，森林出版，1981
4）Chopra, A. K.：*Dynamics of Structures*，Prentice Hall，1995
5）Clough, R. W. and Penzien, J.：*Dynamics of Structures*，McGraw-Hill，1993
6）Paz,M：*Structural Dynamics*，Chapman & Hall，1997