構造実験　B 座屈

座屈に関する理論的背景

平成 18年 10 月12日

目次

１．オイラー座屈 ------ 2

２．軸力を受ける柱のつり合い方程式 ------ 2

2.1 軸力が作用するはりのたわみに関する微分方程式の導出とその一般解 ------ 2

2.2 様々な支持条件下での座屈荷重と座屈モード形 ------ 4

(1) 両端がピン支持の場合 ------ 4

(2) 一端固定，他端自由の場合 ------ 6

(3) 一端固定，他端ピン支持の場合 ------ 6

(4) 両端固定の場合 ------ 7

３．２階常微分方程式を用いたはりのオイラー座屈荷重の導出 ------ 9

3.1 両端がピン支持の場合 ------ 9

3.2 一端固定，他端自由の場合 ------10

3.3 一端固定，他端ピン支持の場合 ------11

柱の座屈に関するオイラーの理論式

１．　オイラー座屈

軸方向の圧縮力を受ける棒を柱といい，断面の寸法に比較して長さが長い柱を特に長柱と呼ぶ．長柱が軸圧縮力を受けると，破壊は圧縮だけで起こらず，ある大きさの荷重に達すると柱は急に曲げられ，側方にたわみを生じる．この現象を座屈という．座屈を生じるときの荷重を座屈荷重，また，座屈荷重を柱の断面積で割った値を座屈応力という．座屈応力が降伏応力を越えない範囲の座屈問題は，オイラー（L. Euler(1707-1783)）によって初めて取り扱われたため，オイラー座屈と呼ばれる．

２．　軸力を受ける柱のつり合い方程式

2.1 軸力が作用するはりのたわみに関する微分方程式の導出とその一般解

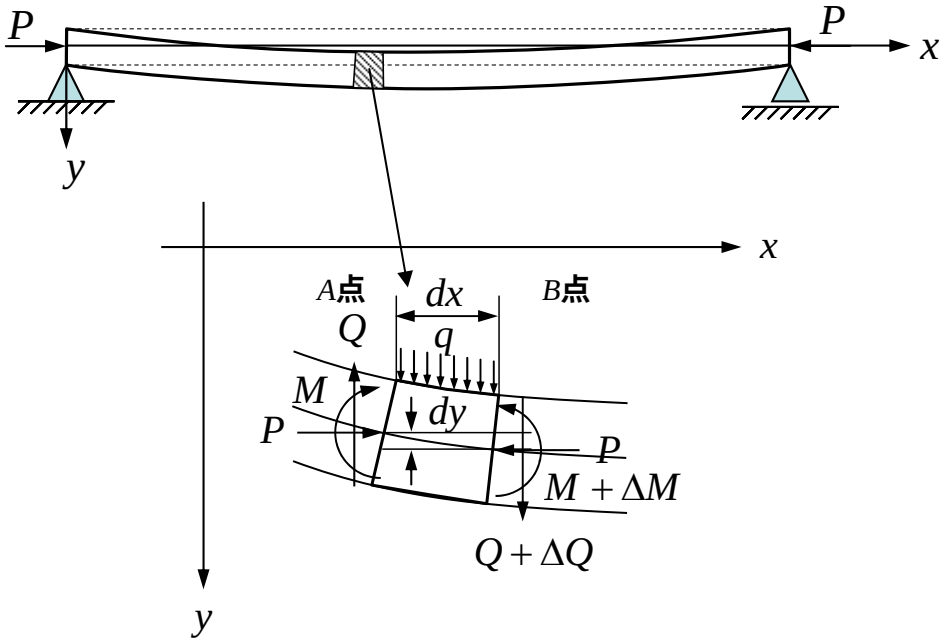

図１　圧縮力を受ける柱

図１に示すように，軸力 P を受ける柱の変形を考えてみよう．柱のたわみが小さい範囲では，次の近似が成立する．

$$\frac{dy}{dx} = \tan\theta \cong \sin\theta \cong \theta, \quad \cos\theta \cong 1, \quad ds \cong dx \tag{1}$$

図１より，上下方向および点 B まわりの曲げモーメントのつり合いを考えると，

$$Q - qdx - (Q + dQ) = 0$$

$$M + Qdx + Pdy - \frac{qdx}{2}dx - (M + dM) = 0$$

したがって,

$$\frac{dQ}{dx} = -q \tag{2}$$

$$\begin{aligned} Q &= \frac{dM}{dx} - P\frac{dy}{dx} \\ &= -EI\frac{d^3y}{dx^3} - P\frac{dy}{dx} \end{aligned} \tag{3}$$

式(2)はせん断力の変化率が分布荷重に等しいことを表しており，軸力 P が作用していない普通のはりの場合と同じであるが，式(3)は，軸力 P が作用する場合には，曲げモーメントの変化率の他に軸力 P もせん断力に寄与することを示している．軸力 P がゼロの場合には，式(3)は通常のせん断力と曲げモーメントの関係となる．また，柱のたわみが微小であれば，曲げモーメントたわみの間には次式が成り立つ．

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EI} \tag{4}$$

式(4)には，軸力 P は影響しない．式(2)に式(3)，(4)を代入すると，

$$\frac{d^4y}{dx^4} + k^2\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{q}{EI} \tag{5}$$

ここで,

$$k^2 = \frac{P}{EI} \tag{6}$$

なお，分布荷重 $q = 0$ の場合には,

$$\frac{d^4y}{dx^4} + k^2\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \tag{7}$$

式(7)の一般解は，以下の通りとなる．

$$y = A\cos kx + B\sin kx + Cx + D \tag{8}$$

ちなみに，４次までの微分形を示すと以下の通りとなる．

$$\begin{aligned} y' &= -Ak\sin kx + Bk\cos kx + C \\ y'' &= -Ak^2\cos kx - Bk^2\sin kx \\ y''' &= Ak^3\sin kx - Bk^3\cos kx \end{aligned} \tag{9}$$

なお，係数 A，B，C，D および k は境界条件を与えることで求められる．式(7)の一般解は，はりに軸力 P が作用している状態でのたわみであり, はりが座屈した場合のたわみ形（座屈モード形）を意味している．また，式(6)において k とはりの曲げ剛性 EI から求められる軸

力 P は座屈する際の荷重（座屈荷重）となる．次章では，様々な境界条件に対して座屈荷重と座屈モードを求める．

2.2 様々な支持条件下での座屈荷重と座屈モード形

(1) 両端がピン支持の場合

図１に示したように両端をピンで支持されたはりを考えると，境界条件は，$x=0$ と $x=l$ において以下の通りとなる．

$$y=0,\quad \frac{d^2y}{dx^2}=0 \quad (at\ \ x=0, x=l) \tag{a}$$

これを式(8)，(9)に代入すると，

$$\begin{gathered} A+D=0,\quad k^2A=0 \\ A\cos kl+B\sin kl+Cl+D=0 \\ k^2A\cos kl+k^2B\sin kl=0 \end{gathered} \tag{b}$$

A，B，C，D が全て０ではない解を得るためには，$A=C=D=0$，$B\neq 0$ で，

$$\sin kl=0 \tag{c}$$

が成立しなければならない．式(c)を座屈条件式（buckling equation）とよび，次式の通り k に関して複数の解が存在する．

$$k=\frac{n\pi}{l} \qquad (n=1,2,3,\cdots\cdots) \tag{d}$$

このとき，座屈荷重 P_{cr}，たわみ ϕ は，$B=b$ と置くと，

$$P_{cr}=\frac{n^2\pi^2EI}{l^2} \tag{10}$$

$$\phi=b\sin\frac{n\pi x}{l} \tag{11}$$

となり，次数 n に応じて何通りもの座屈荷重 P_{cr} とたわみ ϕ が得られる．これは，式(7)で表される，オイラー座屈に関する微分方程式には複数の解が存在することを示している．しかし，座屈後のたわみが ϕ_i となる座屈荷重 $P_{cr,i}$ はただ一組である．このように，微分方程式の解（この場合，たわみ形 ϕ）と特性値（この場合，座屈荷重 P_{cr} を決定する k）に特定の組み合わせがあるような問題のことを固有値問題と呼び，座屈問題，振動問題や量子力学など様々な物理現象に登場する．微分方程式の一般解は，互いに独立な固有関数 ϕ_i の線形和として表わされ，ϕ のことを一般にモード（座屈解析では座屈モード，振動解析では振動モード）と呼ぶ．

ちなみに，座屈や振動に関する微分方程式を直接解くことができない場合には，離散化して代数方程式（マトリクス方程式）として解くことがよくあるが，この場合でも解は固有べ

クトルϕの線形和で表すことができ，モードは固有ベクトルとして，座屈荷重や固有振動数は固有値λを使って求めることができる．

図 2 は，1 次～4 次の座屈モードϕを示したものである．式（10）によれば，座屈荷重P_{cr}は１次モードの時に$\pi^2 EI/l^2$と最も小さく，2 次，3 次と高次モードになるほど，座屈荷重は$4\pi^2 EI/l^2$，$9\pi^2 EI/l^2$と大きくなる．このため，2 次モードの座屈を起こすためには，1 次モードの座屈が起こらないように，座屈モードを拘束しなければならない．一般に，高次の座屈モードを再現するためには特別な拘束が必要となり，座屈荷重も大きくなる．したがって，小さな荷重で座屈する，n=1 となる場合の座屈荷重がP_{cr}最も重要となる．

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \tag{12}$$

$$\phi = b\sin\frac{\pi x}{l} \tag{13}$$

なお，座屈は，式（12）による座屈荷重P_{cr}に達すると突然起こるものであり，この荷重以下では柱にはたわみは全く生じない．

なお，式(3)からせん断力を求めると，

$$\begin{aligned} Q &= -EI\frac{d^3y}{dx^3} - P\frac{dy}{dx} \\ &= EIk^3 B\cos kx - PkB\cos kx \\ &= k\cos kx(EIk^2 - P)\cos kx \\ &= 0 \end{aligned} \tag{e}$$

これは，軸力Ｐを作用させている間，柱にはせん断力は作用しないことを示している．上下方向に完全にまっすぐな状態で軸力を作用させるため，支点において水平力が作用しないためである．

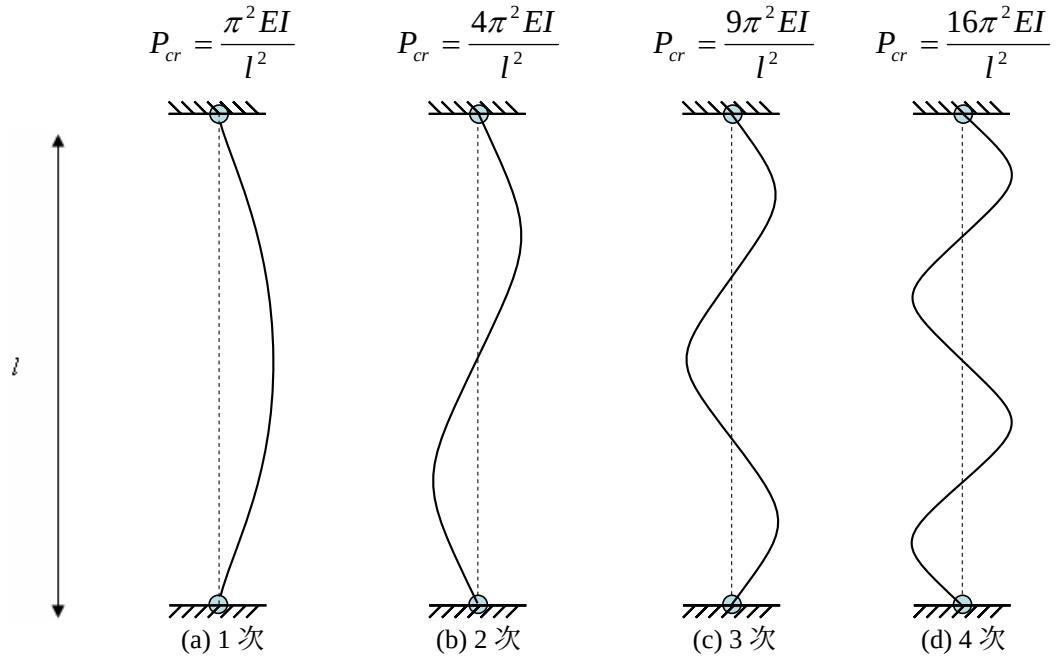

図 2　両端がピン支持の場合の座屈モード

(2) 一端固定，他端自由の場合

境界条件は,

$$x=0\text{で},\quad y=0,\quad y'=0$$
$$x=l\text{で},\quad y''=0,\quad Q=0 \tag{a}$$

これを式(8), (9), (3)に代入すると,

$$A+D=0,\quad Bk+C=0$$
$$Ak^2\cos kl+Bk^2\sin kl=0 \tag{b}$$
$$-EIk^3(A\sin kl-B\cos kl)-Pk(-A\sin kl+B\cos kl+C)=0$$

これより，$B=C=0$であり，$D=-A\neq 0$の解を得るためには，次の座屈条件式を満足しなければならない.

$$\cos kl=0 \tag{c}$$

したがって,

$$kl=\frac{(2n-1)\pi}{2}\qquad (n=1,2,3,\cdots\cdots) \tag{d}$$

したがって，座屈荷重は，$n=1$として,

$$P_{cr}=\frac{\pi^2 EI}{4l^2} \tag{14}$$

座屈モードϕは，$A=-D=-a$と置いて,

$$\phi=a(1-\cos\frac{\pi x}{2l}) \tag{15}$$

(3) 一端固定，他端ピン支持の場合

境界条件は,

$$x=0\text{で},\quad y=0,\quad y'=0$$
$$x=l\text{で},\quad y=0,\quad y''=0 \tag{a}$$

これを式(8), (9)に代入すると,

$$A+D=0,\quad Bk+C=0$$
$$A\cos kl+B\sin kl+Cl+D=0 \tag{b}$$
$$Ak^2\cos kl+Bk^2\sin kl=0$$

これより，$D=-A$，$C=-Bk$を代入して，C，D を消去すると,

$$\begin{gathered} A(1-\cos kl)+B(kl-\sin kl)=0 \\ A\cos kl+B\sin kl=0 \end{gathered} \tag{c}$$

A，B ともにゼロでない解を得るためには,

$$\begin{vmatrix} 1-\cos kl & kl-\sin kl \\ oskl & \sin kl \end{vmatrix}=0 \tag{d}$$

したがって,

$$\sin kl-kl\cos kl=0 \tag{e}$$

となり，座屈条件式は，次式の通りとなる.

$$\tan kl=kl \tag{f}$$

これを満足する最小の kl は

$$kl=4.493 \tag{g}$$

したがって，座屈荷重は,

$$P_{cr}=\frac{20.19EI}{l^2} \tag{16}$$

式(e)を式(b)の 3 式目に代入すると， $A+Bkl=0$ であるから， $D=-A$， $B=-A/(kl)$ ， $C=-Bk=A/l$ となる．これより，座屈モード ϕ は， $A=a$ と置いて,

$$\phi=a\left\{\cos\frac{4.493x}{l}-\frac{\sin(4.493x/l)}{4.493}+\frac{x}{l}-1\right\} \tag{17}$$

(4) 両端固定の場合

境界条件は,

$$x=0,\quad x=l\text{ で},\quad y=0,\quad y'=0 \tag{a}$$

これを式(8)，(9)に代入すると,

$$\begin{gathered} A+D=0,\quad Bk+C=0 \\ A\cos kl+B\sin kl+Cl+D=0 \\ -Ak\sin kl+Bk\cos kl+C=0 \end{gathered} \tag{b}$$

これより， $D=-A$， $C=-Bk$ を代入して，C，D を消去すると,

$$\begin{aligned} A(1-\cos kl)+B(kl-\sin kl)=0 \\ A\sin kl+B(1-\cos kl)=0 \end{aligned} \tag{c}$$

A，B ともにゼロでない解を得るためには,

$$\begin{vmatrix} 1-\cos kl & kl-\sin kl \\ \sin kl & 1-\cos kl \end{vmatrix}=0 \tag{d}$$

したがって,

$$2-2\cos kl-kl\sin kl=0 \tag{e}$$

これを整理すると,

$$\sin\frac{kl}{2}(\sin\frac{kl}{2}-\frac{kl}{2}\cos\frac{kl}{2})=0 \tag{f}$$

となり，座屈条件式は,

$$\sin\frac{kl}{2}=0 \tag{g}$$

もしくは,

$$\tan\frac{kl}{2}=\frac{kl}{2} \tag{h}$$

式(g)を満足する kl は,

$$\frac{kl}{2}=n\pi \qquad (n=1,2,3,\cdots\cdots) \tag{i}$$

一方，式(h)を満足する最小の $kl/2$ は,

$$\frac{kl}{2}=4.493 \tag{j}$$

これは式(g)(n=1)よりも大きいため，式(g)(n=1)が座屈荷重を与える．したがって，座屈荷重は,

$$P_{cr}=\frac{4\pi^2 EI}{l^2} \tag{18}$$

座屈モード ϕ は，$B=C=0$，$D=-A=a$ と置いて,

$$\phi = a(1-\cos\frac{2\pi x}{l}) \\ = 2a\sin^2\frac{\pi x}{l} \tag{19}$$

３．　２階常微分方程式を用いたはりのオイラー座屈荷重の導出

以上は，式(5)による４回の常微分方程式を用いた解であるが，軸力によって柱に生じる曲げモーメントの分布が容易に求められる場合には，式(4)による２階の常微分方程式を解くことによっても座屈荷重を求めることができる．

3.1　両端がピン支持の場合

図３に示すように，軸力が作用すると，任意の点ｘに作用する曲げモーメントは,

$$M_x = Py \tag{a}$$

これを式(4)に代入すると,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M_x}{EI} = -\frac{Py}{EI} \tag{b}$$

これを整理して,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + k^2y = 0 \tag{c}$$

ここで，k^2 は式(6)で定義されている．式(c)の一般解は,

$$y = A\cos kx + B\sin kx \tag{d}$$

境界条件は,

$$x = 0,\quad x = l \text{ で } y = 0 \tag{e}$$

であるから，これを式(d)に代入すると，座屈方程式は,

$$\sin kl = 0 \tag{f}$$

と，４回の常微分方程式の場合と同じ結果が得られる．

式(e)では柱の両端で $M = 0$ の条件を使っていないが，式(11)で与えられる座屈モードは $x = 0$，$x = l$ で $M = 0$ の条件を満足する．また，柱にはせん断力が生じないことは前述したとおりである．

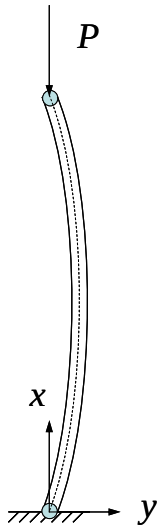

図 3　両端ピン

3.2　一端固定，他端自由の場合

図 4 に示すように，軸力が作用すると，自由端Ｂのたわみを y_B と置くと，任意の点ｘに作用する曲げモーメントは,

$$M_x = -P(y_B - y) \tag{a}$$

これを式(4)に代入すると,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{Py}{EI}(y_B - y) \tag{b}$$

これを整理して,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + k^2 y = k^2 y_B \tag{c}$$

式(c)の一般解は,

$$y = A\cos kx + B\sin kx + y_B \tag{d}$$

境界条件は,

$$x = 0 \text{ で } y = 0,\quad y' = 0 \tag{e}$$

であるから，これを式(d)に代入すると， $A = y_B$， $B = 0$ となり，式(d)よりたわみは,

$$y = y_B(1 - \cos kx) \tag{f}$$

自由端Ｂ（ $x = l$ ）のたわみが y_B であるから，式(f)に $x = l$ を代入すると

$$y_B = y_B(1 - \cos kl) \tag{g}$$

したがって，$y_B \neq 0$ の解を持つためには，座屈方程式として次式が成立する必要がある．

$$\cos kl = 0 \tag{h}$$

これは前述の４回の常微分方程式の場合と同じ結果である．

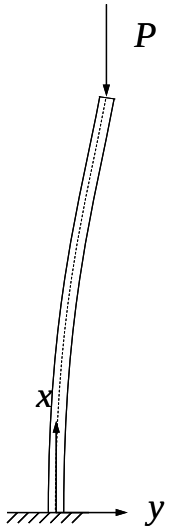

図 4　一端固定，他端自由

3.3　一端固定，他端ピン支持の場合

図 5 に示すように，軸力が作用すると，ピン支持点には水平反力 V が生じる．したがって，任意の点 x に作用する曲げモーメントは，

$$M_x = Py - V(l - x) \tag{a}$$

これを式(4)に代入すると，

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{1}{EI}\{Py - V(l - x)\} \tag{b}$$

これを整理して，

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 y = k^2 \frac{V}{P}(l - x) \tag{c}$$

式(c)の一般解は，

$$y = A\cos kx + B\sin kx + \frac{V}{P}(l - x) \tag{d}$$

境界条件は，

$$x = 0 \text{ で } y = 0,\quad y' = 0,\quad x = l \text{ で } y = 0 \tag{e}$$

であるから，これを式(d)に代入すると，

$$A+\frac{Vl}{P}=0,\quad kB-\frac{V}{P}=0,\quad A\cos kl+B\sin kl=0 \tag{f}$$

これより座屈方程式は，

$$\tan kl = kl \tag{g}$$

これは前述の４回の常微分方程式の場合と同じ結果である．

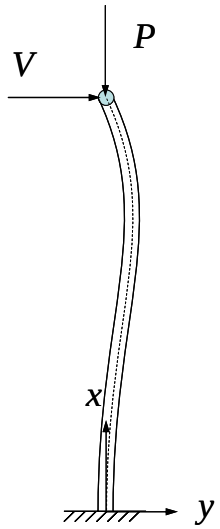

図５　一端固定，他端ピン