第4章　組合せ最適化問題

4.1　概要

解ベクトルの各要素が離散的な値しかとらず，実行可能階の数が有限個であるような数理計画問題を，組合わせ最適化問題という．前章で扱った最短路問題では，x_i は _____ に制限されているので，枝数を m とすれば解ベクトルは高々_____ 個しかなく，これは組合せ最適化問題である．また，変数が整数のみをとるという条件で最適化を行う数理計画法である _____ も，組合わせ最適化問題の一種である．

組合せ最適化問題では，実行可能解の数は有限であるから，すべての実行可能解について目的関数の値を計算することによって最適解を得ることができる．しかし，変数の数が多くなると，解の数が爆発的に増える．たとえば，n 変数が $0, 1$ のみを取る場合を考えても，解の個数は _____ あり，$n = 10, 30, 50$ のときにはそれぞれ _____,_____,_____ となる．したがって，しらみつぶしに目的関数を計算する方法は，n が大きくなると現実的ではない．

そこで，問題の性質や構造を利用して，効率的なアルゴリズムを作る必要がある．この章では，以下の方法について，問題例をあげながら説明する．

- 欲張り法 $\cdots$ その場その場で最良であるものを取り入れていくという，単純な考え方で最適解を求めようとする方法の総称．欲張り法で最適解が求まる問題と，求まらない問題がある．
- 分枝限定法 $\cdots$ しらみつぶしに実行可能解について調べるために場合分けを行う際に，不必要な場合分けを省略して計算量を削減する方法．
- 動的計画法 $\cdots$ 全体の問題を求めるために，小さい問題の最適解を求め，次第に拡張していく方法の総称．
- 近似解法 $\cdots$ 最適解を求めるのはとりあえずあきらめ，最適解に近い解を探索する解法．必要に応じてさらによい近似最適解を探索することもある．

4.2　欲張り法

その場その場で最良であるものを取り入れていくという，単純な考え方で最適解を求める方法の総称．したがって，最適解が求まる問題は限られている．

4.2.1　最小木問題

まず，必ず最適解が求まる例として，最小木問題を例にして欲張り法を説明する．
木の長さ: 木に含まれる全ての枝の長さの和．
最小木: 長さが最小である木（スパニングツリー）．

[**問題 4.1**] 図 4.1 に示すネットワークに対して，最小木を求めよ．ただし，各枝に与えられている数値は枝の長さである．

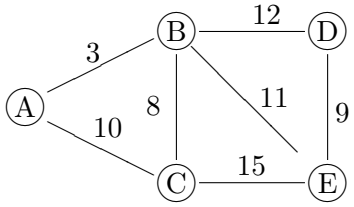

図 4.1: 最小木を求めるネットワーク

最小木問題に対する欲張り法は，＿＿＿＿＿＿＿＿ と呼ばれている．具体的には以下のとおり．

クラスカル法

1. 枝を長さの短い順でソートする．枝 $e_i \in E$ の長さを a_i とすると，

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_m$$

となる．$T = \{e_1\}, k = 2$ とする．

2. $T \cup \{e_k\}$ が閉路を含まないならば，$T \leftarrow T \cup \{e_k\}$ とする．閉路を含んでしまうときは T はそのまま．

3. T がスパニングツリーになっていれば終了．そうでなければ，$k \leftarrow k + 1$ として，2. に戻る．

スパニングツリーは必ず ＿＿＿＿ 本の枝からなるので，3. の判定は集合 T に含まれる枝数

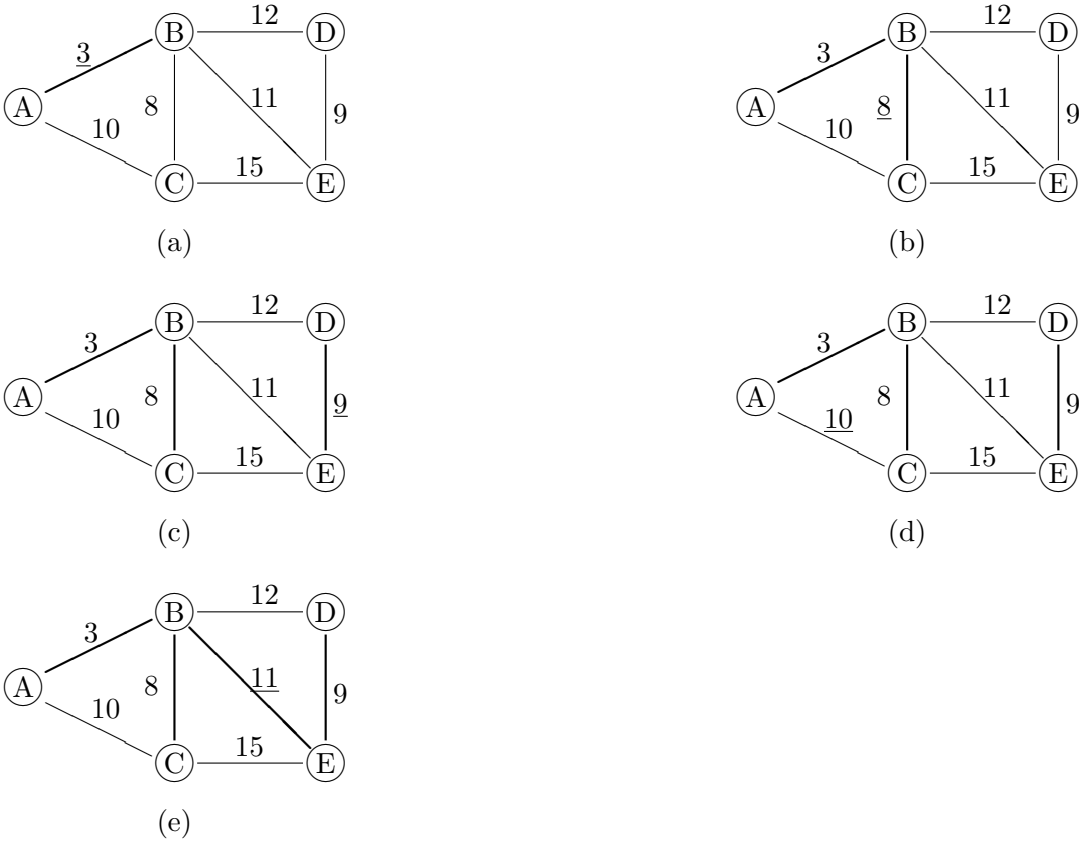

図 4.2: クラスカル法

を数えればよい.

問題 4.1 をクラスカル法を用いて解いてみよう．まず，枝は

$$E = \{(A,B),(A,C),(B,C),(B,D),(B,E),(C,E),(D,E)\}$$

の 7 本．長さの順に並べると，

$$\{e_1,\ldots,e_7\} = \{(A,B),(B,C),(D,E),(A,C),(B,E),(B,D),(C,E)\}$$

となる．あとは図 4.2 の (a)〜(e) のとおり．長さにアンダーラインのついた枝は e_k として注目されている枝を示し，太線は T に含まれる枝を示す．図の (d) では $e_4 = (A,C)$ に注目しているが，これを T に加えると閉路ができてしまうので，何もしていない．図の (e) で T に $4(= n-1)$ 本の枝が入ったので終了している．

クラスカル法によって必ず最小木が得られることを示そう.

全域森： ある与えられた（必ずしも連結していない）グラフにおいて，どの枝を加えても閉路ができてしまう枝集合を**全域森**という．１つのグラフにおいて全域森に属する枝の数は，一定である．（n' 個の連結グラフからなるグラフでは，全域森の枝数は $n - n'$ 本.）

クラスカル法で得られる枝の集合 T は，閉路を持たず，枝の本数は $n-1$ なので，T は _____ である．T 内の枝を T に組み込んだ順に並べたものを $\{e_{l_1}, e_{l_2}, \ldots, e_{l_{n-1}}\}$ とすると，それらは _____ 順になっている．つまり，

$$a_{l_1} \leq a_{l_2} \leq \cdots \leq a_{l_{n-1}} \tag{4.1}$$

となっている．

さて，入力されたネットワーク $G = (V, E)$ に対する任意のスパニングツリー T^* を考える．T^* 内の枝を T と同様に長さの短い順に並べたものを $\{e_{q_1}, e_{q_2}, \ldots, e_{q_{n-1}}\}$ とする．つまり，

$$a_{q_1} \leq a_{q_2} \leq \cdots \leq a_{q_{n-1}} \tag{4.2}$$

となっている．さて，ある r $(1 < r \leq n-1)$ が存在して，

$$\begin{aligned} a_{l_1} &\leq a_{q_1} \\ &\vdots \\ a_{l_{r-1}} &\leq a_{q_{r-1}} \\ a_{l_r} &> a_{q_r} \end{aligned}$$

と書けるとしよう．（e_{l_1} は最も短い枝であるから，$r = 1$ となることはない.）ここで，枝の集合 $T' = \{e_{l_1}, \ldots, e_{l_{r-1}}, e_{q_1}, \ldots, e_{q_r}\}$ からなるグラフ G' を考える．（これは，G の部分グラフになっていて，連結しているとは限らない．また，T' には，重複した枝が存在するかもしれない.）式 (4.1)(4.2) より，T' 内の枝は全て a_{l_r} より _____．したがって，クラスカル法において，枝 e_{l_r} が T として選ばれる前に，T' 内の枝はすでに注目されているので，$r-1$ 本の枝 $\{e_{l_1}, \ldots, e_{l_{r-1}}\} \subset T$ は，グラフ G' における _____ になっている．（そうでなければ，T に加えても閉路ができないような枝が T^* に存在するはずで，クラスカル法において e_{l_r} が選ばれる前にその枝が選ばれているはずである.）グラフ G' における全域森の枝数は _____ である．したがって，r 本の枝 $\{e_{q_1}, \ldots, e_{q_r}\} \subset T^*$ は閉路を含んでいるはずであり，これは T^* が木であることに矛盾する．

以上より，全ての i $(1 \leq i \leq n-1)$ に対して

$$a_{l_i} \leq a_{q_i}$$

が成り立っている．すなわち，T の長さは任意の T^* の長さより短かく，T は最小木である．

4.2.2　ナップザック問題

次に，欲張り法では最適解が求まらない例をあげよう．

[問題 4.2] [ナップザック問題] n 個のアイテムは，それぞれ重さが a_i であり，利用価値が c_i である．ナップザックには重さ b までしか入れられないとき，利用価値の総和が最も大きくなるようにするには，どのアイテムを入れればよいか．

この問題は次のように定式化できる．

$$\begin{aligned} \text{目的関数} \quad &: \quad \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \rightarrow \text{ 最大化} \\ \text{制約条件} \quad &: \quad \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq b \\ & \quad\quad x_i \in \{0,1\} \end{aligned}$$

i 番目のアイテムをナップザックに入れるときは $x_i = 1$，そうでなければ $x_i = 0$ である．

ここで，アイテムは「単位重さあたりの利用価値」の大きいもの順に並べであるとしよう．つまり，

$$\frac{c_1}{a_1} \geq \frac{c_2}{a_2} \geq \cdots \geq \frac{c_n}{a_n}$$

とする．この問題を欲張り法で解くには，____ __________ から順に，重さの制限が許す限り入れていけば良い．たとえば，下記のように定式化された問題：

$$\begin{aligned} \text{目的関数} \quad &: \quad 7x_1 + 8x_2 + x_3 + 2x_4 \rightarrow \text{ 最大化} \\ \text{制約条件} \quad &: \quad 4x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 6 \\ & \quad\quad x_i \in \{0,1\} \end{aligned}$$

の場合，$x_1 = 1, x_2 = 0$______________________________，$x_3 = 1$，$x_4 = 0$__________ ____________________ と決定していき，最終的に実行可能解 $\mathbf{x} = (1,0,1,0)$ を得る．このとき，利用価値の総和は ___ である．しかし，しらみつぶしに解を調べることにより，$(0,1,1,0)$ が最適解（目的関数の値は ___）であることがわかる．

4.2.3　欲張り法の弱みと強み

最小木問題では，最小化をするために短い枝から順に取り入れていく方法 (欲張り法) によって最適解を求めることができたが，ナップザック問題をはじめ，多くの問題では最適解を求めることはできない．しかし，欲張り法は考え方が簡単で計算量が少ないため，他の手法の中で近似解を得るのに使われるなど，活用されている．