

3.4 最小費用流問題

3.4.1 概要

最小費用流問題: 図 3.4 に与えられたネットワークにおいて, 全ての節点における需要量・供給量を満足しつつ, コストを最少にするにはどうしたらよいか. (枝に与えられた値 = (コスト, 容量), 節点に与えられた値 = 供給量 (正), 需要量 (負))

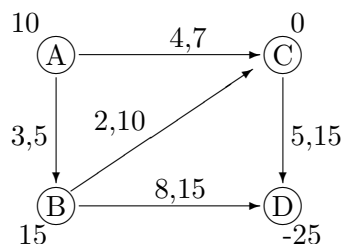


図 3.4: 枝と節点に値が与えられているネットワーク

与えられたグラフ (ネットワーク) $G = (V, E)$ において, 枝 $(i, j) \in E$ に対して, 輸送コストを $c_{i,j}$, 容量を $u_{i,j}$ とし, 節点 $i \in V$ に対して需要・供給量を b_i とする. ただし, $b_i > 0$ はその節点の供給量が b_i であることを示し, $b_i < 0$ はその節点の需要量が $|b_i|$ であることを示す. 従って, $b_i = 0$ ならば節点 i は通過節点で, $b_i < 0$ ならば _____, $b_i > 0$ ならば _____ である. 最小費用流問題は, 枝 (i, j) 上に輸送する量を変数 $x_{i,j}$ として, 次のように定式化できる.

$$\text{目的関数: } \sum_{(i,j) \in E} c_{i,j} x_{i,j} \rightarrow \text{最小化}$$

$$\text{制約条件: } \sum_{(v,j) \in E} x_{v,j} - \sum_{(i,v) \in E} x_{i,v} = b_v \quad (\forall v \in V)$$

以下では, 最少費用流問題の 2 つの解法について簡単に説明する.

3.4.2 バサッカー・ゴーウェン法

供給点 (ソース) と需要点 (シンク) が 1 つずつ存在し, 他の節点は全て通過点であるネットワークに対する最小費用流問題を考えよう.

最小費用流問題では, ソースからシンクまでの路で費用が最少であるものに, できるだけ多く流すようにすればよい. このような方針から最小費用流を求める方法を, 考案した人の名前から **バサッカー・ゴーウェン法** という. 手順の概略は以下の通り.

— バサッカー・ゴーウェン法 —

- (Step 1) まず, 各枝コストを長さと考えて, ソースからシンクまでの最短路を求める (最短路問題). 求まった路が, 単位流量あたり最も安く流せる経路である. そこに, 流せるだけ流す. (流せる最大量 = _____)
- (Step 2) フロー増加法と同様に, 得られたフローに対して残余ネットワークを作る. このとき, 残余容量は以前と同様に考え, 枝のコストについては, 反対むきの枝については _____ とする.
- (Step 3) 残余ネットワークに対して, コストを長さと考えて, 最短路を求める (負の長さを持つ枝が存在する最短路問題). 求まった路が増加路の中で最小コストの経路.
- (Step 4) 最短の増加路に流せるだけ流し (経路上の最小容量分のフローを追加), 流量が増加したフローを得る. 流量が必要な容量に達したら終わり. そうでなければ Step 2 に戻る.

例として, 図 3.5(a) で示すネットワークを考えてみよう. ソースとシンクはそれぞれ節点 A と D , 枝に与えられた数値は (コスト, 容量) である.

- (1) A から D への最短路は ($A \rightarrow$ _____) で長さは _____. これは, この経路で 1 単位流すとコストが _____ かることを意味している. この路上の最小容量は _____. よって, 図 3.5 の (b) のフローが得られる.
- (2) この時点での流量は必要な流量 7 より小さい. そこで, 残余ネットワークを作る (同図 (c)).
- (3) 最短路を求めると, ($A \rightarrow$ _____) で長さは _____. この路上の最小容量は _____. よって, 同図 (d) のフローが得られる.
- (4) まだ流量が足りないので残余ネットワークを作る (同図 (e)).
- (5) 最短路を求めると, ($A \rightarrow$ _____) で長さは _____. この路上の最小容量は _____. しかし, 流せるだけ流すと必要量をオーバーしてしまうので, 増加路にそって _____ だけ流量を追加する. よって, 同図 (f) のフローが得られる. これが最小費用流となっている.

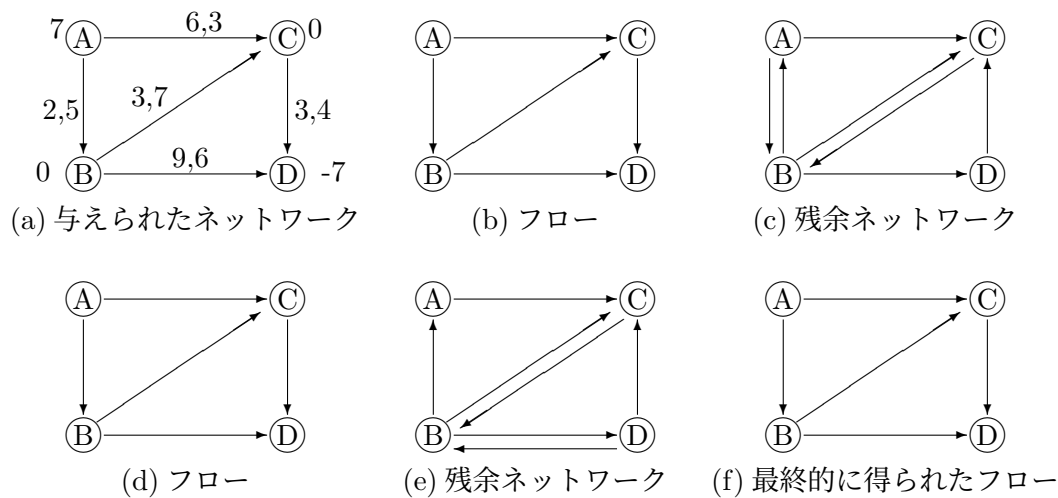


図 3.5: バサッカー・ゴーウェン法による解き方

[課題 3.5] 図 3.6 に与えられたネットワークにおいて、節点 A (ソース) から節点 D (シンク) へ流量 7 を流したい。ただし、枝に与えられた値は (フロー 1 単位当りのコスト, 容量) である。最小費用流をバサッカー・ゴーウェン法を用いて求めよ。

((a) 各枝の長さをコストをとし、 A から D までの最短路問題をダイクストラのアルゴリズムを使って求める。(b) 得られたフローの残余ネットワークを作る。(c) 残余ネットワークにおける最短路を求める。ここでは考える全ての路についてコストを計算し比較すればよい。(d) 必要な流量が得られるまで繰り返す。)

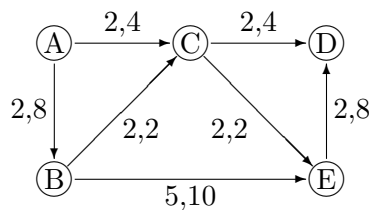


図 3.6: 枝と節点に値が与えられているネットワークその 3

3.4.3 クライン法 (負閉路除去法)

最小費用流問題の別の解法として、全ての制約条件 (流れ保存則, 容量制約条件) を満たすフローが分かっていると、それを初期フローとして費用の最小化をする方法がある。

得られているフローに対する残余ネットワークを考える。(バサッカー・ゴーウェン法で

説明したように、反対向きの枝のコストは _____ とする.) 残余ネットワークの中に、**長さが負の閉路**が存在するでしょう. このような閉路を _____ という. 長さはその路に単位流量を流したときの _____ であるから, 負閉路に沿ってフローを追加すると, 総コストは _____ ことに注意. また閉路であるから, フローを追加しても流量は _____.

このような性質を利用した**クライン法**の手順は以下のとおり.

クライン法

(Step 1) 流れ保存則, 容量制約条件を満たすフローに対して, 残余ネットワークを作る.

(Step 2) 残余ネットワークに対して負閉路を探す. なければ終了.

(Step 3) 負閉路に沿ってフローを流す. 流す量は _____. (総流量は変わらず, 流れ保存則, 容量制約条件は満たされている.) Step 2にもどる.

たとえば, 図 3.7(a) に示すネットワークに対して, 図 3.7(b) が初期フローとして得られているとし, クライン法を適用してみよう.

- (1) 初期フローに対する残余ネットワークは図 3.8(a) となる. すぐに分かるように, _____ や _____ は負閉路になっている.
- (2) たとえば $(A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A)$ に着目すると, 最小の残余容量は _____ であるから, フローを変更すると, 同図 (b) のフローが得られる.
- (3) これに対する残余ネットワークは同図 (c) となり, _____ は負閉路になっている.

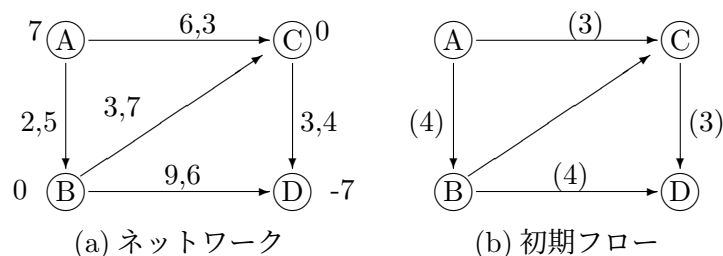


図 3.7: ネットワークと初期フローの例

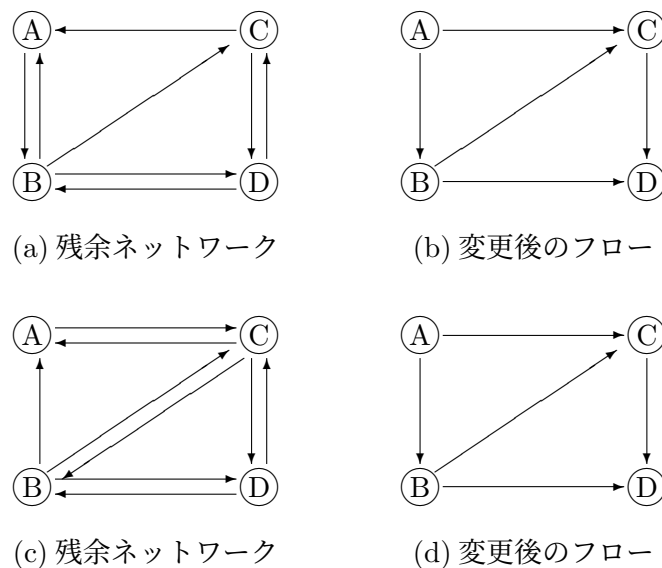


図 3.8: クライン法による解き方

(4) これにそって最小容量の分だけさらにフローを変更すると、同図 (d) が得られる。

それぞれのフローの費用を計算すると、初期フローでは _____, 改良後のフロー (図 3.8(b)) では _____, 最後のフロー (図 3.8(d)) では _____ となっており、コストが改善されている。

[課題 3.6] 課題 3.5 をクライン法を用いて解け。((a) コストは無視して必要な流量を流すフローを見つける (b) 残余ネットワークを作り、負閉路を探し、コストが改善されたフローを求める。 (c) 負閉路がなくなるまで繰り返す。)

付録：最短路問題の別の解法

ダイクストラのアルゴリズムでは、負の長さを持つネットワークには適用できなかった。ここでは、負の長さを持つネットワークに対しても適用できるアルゴリズムを紹介する。

フロイド・ワーシャル法：ネットワーク $G = (V, E)$, 枝 $(i, j) \in E$ の長さを a_{ij} とする。(a_{ij} は正とは限らない。) 任意の 2 点間の最短距離とその路を求める。具体的には、以下のとおり。

— フロイド・ワーシャル法 —

(Step 1) 初期状態として, すべての $i, j \in V$ に対して, $d(i, j) = a_{ij}$, $p(i, j) = i$ とおく. ただし $d(i, i) = 0$ とし, $(i, j) \notin E$ ならば $d(i, j) = \infty$ とする. すべての $k \in V$ に対して, Step 2 を順に行う.

(Step 2) すべての $i(\neq k) \in V$ と $j(\neq k) \in V$ に対して,

$$d(i, j) > d(i, k) + d(k, j) \text{ ならば } \begin{cases} d(i, j) \leftarrow d(i, k) + d(k, j) \\ p(i, j) \leftarrow p(k, j) \end{cases}$$

とする.

例として, 図 3.9 のネットワークにフロイド・ワーシャル法を適用してみよう.

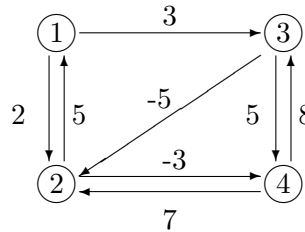


図 3.9: 負の長さの枝が存在するネットワーク

初期状態および各繰り返しにおける $d(i, j), p(i, j)$ を表で表すと,

		j			
$d(i, j)$		1	2	3	4
i	1	0(1)	2(1)	3(1)	∞ (1)
	2	5(2)	0(2)	∞ (2)	-3(2)
	3	∞ (3)	-5(3)	0(3)	5(3)
	4	∞ (4)	7(4)	8(4)	0(4)

 $\Rightarrow$

		j			
$d(i, j)$		<u>1</u>	<u>2</u>	<u>3</u>	<u>4</u>
i	<u>1</u>	<u>0(1)</u>	<u>2(1)</u>	<u>3(1)</u>	<u>∞(1)</u>
	<u>2</u>	<u>5(2)</u>	0(2)	8(1)	-3(2)
	<u>3</u>	<u>∞(3)</u>	-5(3)	0(3)	5(3)
	<u>4</u>	<u>∞(4)</u>	7(4)	8(4)	0(4)

			j			
	$d(i, j)$		1	<u>2</u>	3	4
$\Rightarrow$	1		0(1)	<u>2(1)</u>	3(1)	-1(2)
	i <u>2</u>		<u>5(2)</u>	<u>0(2)</u>	<u>8(1)</u>	<u>-3(2)</u>
	3		0(2)	<u>-5(3)</u>	0(3)	-8(2)
	4		12(2)	<u>7(4)</u>	8(4)	0(4)

			j			
	$d(i, j)$		1	2	<u>3</u>	4
$\Rightarrow$	1		0(1)	-2(3)	<u>3(1)</u>	-5(2)
	i 2		5(2)	0(2)	<u>8(1)</u>	-3(2)
	<u>3</u>		<u>0(2)</u>	<u>-5(3)</u>	<u>0(3)</u>	<u>-8(2)</u>
	4		8(2)	3(3)	<u>8(4)</u>	0(4)

			j			
	$d(i, j)$		1	2	3	<u>4</u>
$\Rightarrow$	1		0(1)	-2(3)	3(1)	<u>-5(2)</u>
	i 2		5(2)	0(2)	5(4)	<u>-3(2)</u>
	3		0(2)	-5(3)	0(3)	<u>-8(2)</u>
	<u>4</u>		<u>8(2)</u>	<u>3(3)</u>	<u>8(4)</u>	<u>0(4)</u>

となる。表の括弧内は $p(i, j)$ の値。

初期状態では、 $d(i, j)$ には他の節点を経由しない節点 i から j への長さを示している。各繰り返しにおいて、すでに k として選ばれた節点からなる集合を S としたとき、 $d(i, j)$ の値は S 内の節点のみを経由する最短路の長さを示している。したがって、最終的に得られた $d(i, j)$ の値が i から j への最短距離となる。

また、 $p(i, j)$ は、その時点での節点 i から j への最短路の、すぐ前の節点を示す。たとえば、3 から 4 への最短路は、 $p(3, 4) = 2$ であるから 4 へ行く前に 2 を経由する、3 から 2 への最短路は $p(3, 2) = 3$ より直接 3 から 2 へ行く。したがって、 $(3 \rightarrow 2 \rightarrow 4)$ が最短路である。同様に、1 から 4 への最短路は $(1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 4)$ である。

では、図 3.10 で示されるネットワークに対して、フロイド・ワーシャル法を適用するとどうなるか？

		1	2	3				1	2	3
1		0(1)	3(1)	-2(1)	$\Rightarrow$	1		0(1)	3(1)	-2(1)
2		-1(2)	0(2)	5(2)		2		-1(2)	0(2)	-3(1)
3		4(3)	-3(3)	0(3)		3		4(3)	-3(3)	0(3)

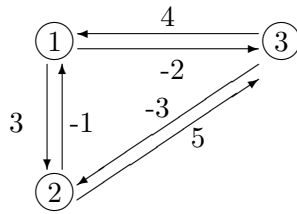


図 3.10: 負閉路が存在するネットワーク

		1	2	3			1	2	3
$\Rightarrow$	1	0(1)	3(1)	-2(1)	$\Rightarrow$	1	-6(2)	-5(3)	-2(1)
	2	-1(2)	0(2)	-3(1)		2	-7(2)	-6(3)	-3(1)
	3	-4(2)	-3(3)	-6(1)		3	-4(2)	-3(3)	-6(1)

となり, $d(1,1) = d(2,2) = d(3,3) = -6$ となる. これは, $(1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1)$ が長さ -6 の負閉路となっていることを示す. また, 最終的な表の中には, 閉路を含む路を示す部分もあり, k の選ぶ順番によって, 異なる解が得られる可能性がある. たとえば, 2 から 1 への最短路は $(2 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1)$ を示している.

このように, 負閉路を含む場合は最短路を求めることができないが, 負閉路が存在することを検出することができる.

以上より, フロイド・ワーシャル法は

- バサッカー・ゴーウェン法における残余ネットワーク上の最短路の探索
- フロイド法における負閉路の探索

に利用できる.

[課題 3.7] 課題 3.6 において求めた全ての残余ネットワークに対し, フロイド・ワーシャル法を適用してみよ.