2.7　課題の答え

課題 2.1　:
(a) 最大化を最小化にするために，目的関数を (-1) 倍する．
(b) スラック変数 x_4, x_5 を導入する．
(c) $x_3 = x_3' - x_3''$ とする．
以上より，

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{目的関数:} & -x_1 - 2x_2 - x_3' + x_3'' & \rightarrow & \text{最小化} \\
\text{制約条件:} & x_1 \quad +x_2 \qquad\qquad\qquad +x_4 \qquad\quad & = & 10 \\
 & -x_1 \qquad\quad +x_3' \quad -x_3'' \qquad\quad -x_5 & = & 8 \\
 & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3' \geq 0,\ x_3'' \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0 &&
\end{array}
$$

と書ける．あるいは，

$$
\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3' \\ x_3'' \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},
$$

$$
\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix}
$$

とすれば，

$$
\begin{array}{ll}
\text{目的関数：} & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \ \rightarrow\ \text{最小化} \\
\text{制約条件：} & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\
 & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}
\end{array}
$$

と書き表せる．

課題 2.2　:
$x_4 = 12 - 3x_1 - 2x_2 - 2x_3$ を目的関数に代入すると，次の基底形式が得られる：

$$
\begin{array}{ll}
\text{目的関数：} & -x_1 - 2x_2 - x_3 + 12 \ \rightarrow\ \text{最小化} \\
\text{制約条件：} & 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 12 \\
 & 4x_1 + 3x_2 + x_3 + x_5 = 8 \\
 & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0
\end{array}
$$

基底変数は (x_4, x_5), 非基底変数は (x_1, x_2, x_3)，基底解は $(0, 0, 0, 12, 8)$，このときの目的関数の値は 12．これは最適解ではない．なぜなら，目的関数の非基底変数の係数が負であり，非基底変数の値を大きくすることによって，目的関数の値をもっと小さくすることができるから．

課題 2.3　：（以降，ピボット要素に*をつけている.）

	x_1	x_2	x_3	x_4	
$-z$	$-1/2$	0	0	$1/2$	4
x_3	2^*	0	1	-1	4
x_2	$1/2$	1	0	$1/2$	4

$\rightarrow$

	x_1	x_2	x_3	x_4	
$-z$	0	0	$1/4$	$1/4$	5
x_1	1	0	$1/2$	$-1/2$	2
x_2	0	1	$-1/4$	$3/4$	3

したがって，最適基底解は $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2, 3, 0, 0)$，このときの目的関数の値は -5.

課題 2.4　：

	x_1	x_2	x_3	x_4	
$-z$	-1	-1	0	0	0
x_3	3^*	2	1	0	12
x_4	1	2	0	1	8

$\rightarrow$

	x_1	x_2	x_3	x_4	
$-z$	0	$-1/3$	$1/3$	0	4
x_1	1	$2/3$	$1/3$	0	4
x_4	0	$4/3^*$	$-1/3$	1	4

$\rightarrow$

	x_1	x_2	x_3	x_4	
$-z$	0	0	$1/4$	$1/4$	5
x_1	1	0	$1/2$	$-1/2$	2
x_2	0	1	$-1/4$	$3/4$	3

したがって，先ほどと同様の結果を得る．

課題 2.5　：

	x_1	x_2	x_3	x_4	
$-z$	-3	-2	0	0	0
x_3	2	1	1	0	6
x_4	1	2^*	0	1	6

$\rightarrow$

	x_1	x_2	x_3	x_4	
$-z$	-2	0	0	1	6
x_3	$3/2^*$	0	1	$-1/2$	3
x_2	$1/2$	1	0	$1/2$	3

$\rightarrow$

	x_1	x_2	x_3	x_4	
$-z$	0	0	$4/3$	$1/3$	10
x_1	1	0	$2/3$	$-1/3$	2
x_2	0	1	$-1/3$	$2/3$	2

したがって，最適基底解は $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2, 2, 0, 0)$，このときの目的関数の値は -10.

課題 2.6　:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
$-z$	-6	-10	-3	0	0	0	0
x_4	4	8^*	1	1	0	0	0
x_5	-1	3	2	0	1	0	0
x_6	0	1	0	0	0	1	1

$\rightarrow$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
$-z$	-1	0	$-7/4$	$5/4$	0	0	0
x_2	$1/2$	1	$1/8^*$	$1/8$	0	0	0
x_5	$-5/2$	0	$13/8$	$-3/8$	1	0	0
x_6	$-1/2$	0	$-1/8$	$-1/8$	0	1	1

$\rightarrow$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
$-z$	6	14	0	3	0	0	0
x_3	4	8	1	1	0	0	0
x_5	-8	-13	0	-2	1	0	0
x_6	0	1	0	0	0	1	1

結局，最適解は $(0,0,0,0,0,1)$，目的関数の値は $z=0$ である．

課題 2.7　:

(a) 人為変数 x_4, x_5 を導入．

目的関数：　$w = x_4 + x_5 \ \rightarrow$ 最小化

制約条件：　$2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6$

$2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_5 = 10$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0$

(b)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
$-w$	0	0	0	1	1	0
	2	1	1	1	0	6
	2	3	2	0	1	10

$\rightarrow$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
$-w$	-4	-4	-3	0	0	-16
x_4	2^*	1	1	1	0	6
x_5	2	3	2	0	1	10

$$\rightarrow \quad \begin{array}{c|ccccc|c} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \\ \hline -w & 0 & -2 & -1 & 2 & 0 & -4 \\ \hline x_1 & 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 3 \\ x_5 & 0 & 2^* & 1 & -1 & 1 & 4 \end{array}$$

$$\rightarrow \quad \begin{array}{c|ccccc|c} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \\ \hline -w & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline x_1 & 1 & 0 & 1/4 & 3/4 & -1/4 & 2 \\ x_2 & 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & 1/2 & 2 \end{array}$$

人為変数が全て非基底変数であるから，このまま人為変数を除けば元の問題の初期基底解となる．

(c)

$$\begin{array}{c|ccc|c} & x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline -z & 3 & 2 & 0 & 0 \\ \hline & 1 & 0 & 1/4 & 2 \\ & 0 & 1 & 1/2 & 2 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{c|ccc|c} & x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline -z & 0 & 0 & -7/4 & -10 \\ \hline x_1 & 1 & 0 & 1/4 & 2 \\ x_2 & 0 & 1 & 1/2^* & 2 \end{array}$$

$$\rightarrow \quad \begin{array}{c|ccc|c} & x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline -z & 0 & 7/2 & 0 & -3 \\ \hline x_1 & 1 & -1/2 & 0 & 1 \\ x_3 & 0 & 2 & 1 & 4 \end{array}$$

したがって，$(x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 4)$ が最適解で，$z = 3$.

課題 2.8　:

(a) 標準形に直す：

$$\begin{aligned} &\text{目的関数：} && z = 3x_1 + 2x_2 \ \rightarrow \ \text{最小化} \\ &\text{制約条件：} && 2x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ & && 4x_1 + 3x_2 - x_4 = 6 \\ & && x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

しかし，初期基底解が得られていない．

(b) 人為変数 x_5, x_6 を導入する．補助問題は次のとおり：

$$\begin{aligned} &\text{目的関数：} && w = x_5 + x_6 \ \rightarrow \ \text{最小化} \\ &\text{制約条件：} && 2x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 2 \end{aligned}$$

$$4x_1 + 3x_2 - x_4 + x_6 = 6$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0,\ x_6 \geq 0$$

(c) 補助問題をシンプレックス法で解く：

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
$-w$	0	0	0	0	1	1	0
	2	1	-1	0	1	0	2
	4	3	0	-1	0	1	6

$\rightarrow$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
$-w$	-6	-4	1	1	0	0	-8
x_5	2^*	1	-1	0	1	0	2
x_6	4	3	0	-1	0	1	6

$\rightarrow$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
$-w$	0	-1	-2	1	3	0	-2
x_1	1	1/2	$-1/2$	0	1/2	0	1
x_6	0	1	2^*	-1	-2	1	2

$\rightarrow$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
$-w$	0	0	0	0	1	1	0
x_1	1	3/4	0	$-1/4$	0	1/4	3/2
x_3	0	1/2	1	$-1/2$	-1	1/2	1

補助問題を解いた結果 $w = 0$ となったので，人為変数を取り除いて (a) の問題の初期基底解とすることができる．

(d)

	x_1	x_2	x_3	x_4	
$-z$	3	2	0	0	0
	1	3/4	0	$-1/4$	3/2
	0	1/2	1	$-1/2$	1

$\rightarrow$

	x_1	x_2	x_3	x_4	
$-z$	0	$-1/4$	0	3/4	$-9/2$
x_1	1	$3/4^*$	0	$-1/4$	3/2
x_3	0	1/2	1	$-1/2$	1

$\rightarrow$

	x_1	x_2	x_3	x_4	
$-z$	1/3	0	0	2/3	-4
x_2	4/3	1	0	$-1/3$	2
x_3	$-2/3$	0	1	$-1/3$	0

したがって，(a) の問題の最適解は $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 2, 0, 0)$.

(e) スラック変数を除くと，与えられた問題の最適解は $(x_1, x_2) = (0, 2)$，このときの目的関数の値は $z = 4$.

課題 2.9　：
初期基底解が得られていないので，補助問題を作る：

$$
\begin{aligned}
\text{目的関数：}\quad & w = x_4 + x_5 \ \rightarrow\ \text{最小化} \\
\text{制約条件：}\quad & 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\
& 2x_1 + 3x_2 + 2x_4 + x_5 = 6 \\
& x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0
\end{aligned}
$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
$-w$	0	0	0	1	1	0
	2	1	1	1	0	10
	2	3	2	0	1	6

$\rightarrow$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
$-w$	-4	-4	-3	0	0	-16
x_4	2	1	1	1	0	10
x_5	2^*	3	2	0	1	6

$\rightarrow$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
$-w$	0	2	1	0	2	-4
x_4	0	-2	-1	1	-1	4
x_1	1	$3/2$	1	0	$1/2$	3

w の最小値は 4 で，0 にはならない．したがって，与えられた問題は，実行可能解を持たない．

課題 2.10　：
取引先 B_1 からの注文量を δ ふやした場合，新しい問題は，

$$
\begin{aligned}
\text{目的関数：}\quad & z' = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \ \rightarrow\ \text{最小化} \\
\text{制約条件：}\quad & A\mathbf{x} = \mathbf{b} + \delta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{b} + \delta\mathbf{e}' \\
& \mathbf{x} \geq \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

となる．すると，この問題の目的関数の最小値 $\bar{z}'$ は，$\bar{z}' = \bar{z} + \delta(y^*)'_1$ となる．ただし，$(y^*)'_i$ は双対問題の最適解 $\mathbf{y}^*$ の要素．同様に考えると，B_i からの注文量を δ ふやした場合

は，コストが $\delta(y^*)'_i$ だけ増えることが分かる．したがって，コスト増を最小に抑えるためには，$\min_i(y^*)'_i$ を与える B_i への注文量を増やせばよい．