

# 第1章 数理計画法とは

システムの最適化を行うためには，次の手順をふむ．

Step 1: 問題を数学モデルとして考える（文章題から式を立てる）

Step 2: 数学モデルを解く（式を解く）

本章では，Step 1 がどのように行われるかを見ていく．具体的には，本講義で扱う問題の例，どのように数学モデル化されるか，基本的な用語の説明などを行う．Step 2 については2章以降で扱う．

## 1.1 線形計画問題

[問題 1.1] 4種類の原料 A,B,C,D を用いて，3種類の製品 I,II,III を生産している工場が，最大の利益をあげるにはどのような生産計画をたてればよいか？ただし，製品を一単位生産したときの利益（万円），製品を1単位生産するために必要な原料の量（単位），各原料の使用可能量（単位）は，それぞれ表 1.1 の (a),(b),(c) で与えられている．

表 1.1: 生産データ

| (a) 利益 |     |     | (b) 原料の必要量 |   |    |     | (c) 使用可能量 |     |
|--------|-----|-----|------------|---|----|-----|-----------|-----|
| I      | II  | III |            | I | II | III | 原料 A      | 80  |
| 70     | 120 | 30  | 原料 A       | 5 | 0  | 6   | 原料 B      | 50  |
|        |     |     | 原料 B       | 0 | 2  | 8   | 原料 C      | 100 |
|        |     |     | 原料 C       | 7 | 0  | 15  | 原料 D      | 70  |
|        |     |     | 原料 D       | 3 | 11 | 0   |           |     |

[数学モデル化(定式化)] 変数を各製品の生産量: $x_1, x_2, x_3$  とする．問題の目的は， $x_1, x_2, x_3$  によって決まる総利益を最大化するような  $x_1, x_2, x_3$  を求めることである．求めたい変数  $x_1, x_2, x_3$  を \_\_\_\_\_ という．総利益は，

$$f(x_1, x_2, x_3) = \text{_____} \quad (1.1)$$

と書ける．各原料の使用可能量が決まっていな（無限大）ならば，無限にたくさんの製品を生産すれば無限にたくさんの利益をあげることができる．しかし，実際は使用可能量に上限があり， $x_1, x_2, x_3$  には以下のような条件がある．

$$\begin{array}{llll} \text{原料 A に対する条件:} & 5x_1 & +6x_3 & \leq 80 \\ \text{原料 B に対する条件:} & & 2x_2 & +8x_3 \leq \text{---} \\ \text{原料 C に対する条件:} & 7x_1 & & +15x_3 \leq \text{---} \\ \text{原料 D に対する条件:} & & & \text{---} \leq \text{---} \end{array} \quad (1.2)$$

また，生産量は非負であるから，

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0. \quad (1.3)$$

したがって，この問題は，式 (1.2) および (1.3) を満たし，式 (1.1) を最大化するような  $(x_1, x_2, x_3)$  を求める問題と見ることができる．

一般に，最大化（あるいは最小化）したい関数を \_\_\_\_\_ という．また，決定変数に課されている条件を \_\_\_\_\_ という．数理計画問題とは「与えられた制約条件のもとで，目的関数を最小または最大とするような決定変数の値を見つける」問題である．問題 1.1 は，

目的関数： \_\_\_\_\_ → 最大化

制約条件：

\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0.$$

と書ける．このように書き表すことを \_\_\_\_\_ という．

この問題の場合，目的関数，制約条件は全て決定変数に関する線形関数である．したがって

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 70 \\ 120 \\ 30 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 8 \\ 7 & 0 & 15 \\ 3 & 11 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 80 \\ 50 \\ 100 \\ 70 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

とすれば，

目的関数： \_\_\_\_\_ → 最大化

制約条件： \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

と書ける．このように，変数の 1 次の等式または不等式で与えられた制約条件のもとで，変数の 1 次関数で与えられた目的関数を最大化（あるいは最小化）する問題を線形計画問題という．

## 1.2 ネットワーク計画問題

複数の点（接点，ノード）と，2 つの点を結ぶ線または矢印（辺，枝）の集合をグラフという．

辺が「向きのない線」であるグラフを \_\_\_\_\_，辺が「向きのある矢印」であるグラフを \_\_\_\_\_ という．

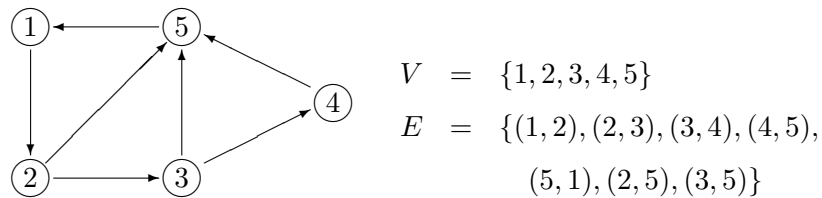


図 1.1: 有向グラフの例

節点や辺に値が与えられているグラフをネットワークという．

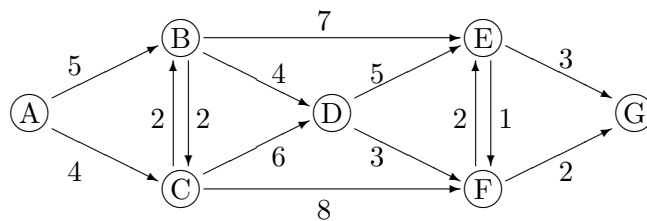


図 1.2: 辺に値が与えられているネットワークの例 1

[問題 1.2] 都市 A から G まで，交通機関を乗り継いで行きたい．どの経路を通ったら最

短で行くことができるか．ただし，都市 A～G における交通機関の路線と都市間を移動するのに要する時間は図 1.2 で与えられるとする．

グラフまたはネットワークにおいて，ある節点から 1 つまたは複数の辺をたどってまた元の節点へ到達する道順を \_\_\_\_\_ という．また，ある節点から他の節点へ到達する閉路を含まない道順を， \_\_\_\_\_ という．

辺に（正の）値が与えられたネットワークにおいて，パス上の辺の値を全て合計した値をそのパスの長さという．

問題 1.2 では，節点 A から節点 G へのパスで，最少の長さを持つパスを探す問題である．このような問題を \_\_\_\_\_ という．

[問題 1.3] 図 1.3 のような 6 つの都市を結んで宅配便を営んでいる運送会社がある．図のネットワークの枝の横に書かれた数値は，一日の輸送量の上限值（個）である．A 市から F 市まで一日に運べる品物の最大量はいくらか？

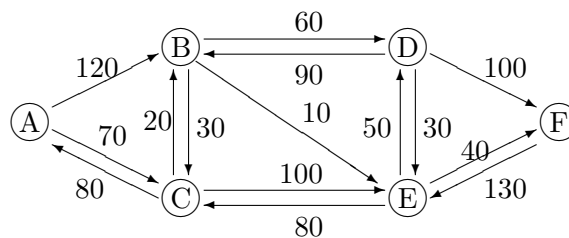


図 1.3: 辺に値が与えられているネットワークの例 2

この問題のように，辺に容量が与えられているネットワークにおいて，ある節点から他の節点へ流すことのできるフローの最大値を求める問題を \_\_\_\_\_ という．

また別の問題として，辺には容量制限があり，辺ごとに単位輸送量あたりのコストが与えられている場合，定められた量を最少のコストで輸送する方法を求める問題を \_\_\_\_\_ という．

[問題 1.4] あるプロジェクトが終了するまでに最低限必要な日数を知りたい．ただし，プロジェクトは作業 A から作業 F の 6 つの作業からなり，それぞれの作業にかかる日数と，その作業を始める前に終了しておかなければならない作業は表 1.2 に示すとおりである．

この問題のように，通常，プロジェクト内の各作業は独立に実行できるのではなく，別の作業が終了しないとその作業が開始できない，というような半順序関係がある．このような半順序関係はネットワークで表わすと解析がし易く，その方法の一つとして \_\_\_\_\_ がある．上の問題のプロジェクトに対するアロー・ダイアグラムは図 1.4 のようになる．

表 1.2: プロジェクトの例

| 作業名 | 制約   | 所要日数 |
|-----|------|------|
| A   | なし   | 4    |
| B   | なし   | 3    |
| C   | A    | 9    |
| D   | A    | 2    |
| E   | B, C | 5    |
| F   | E    | 4    |

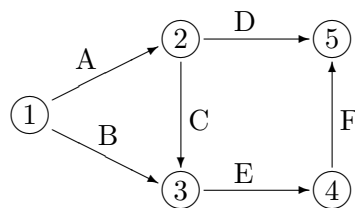


図 1.4: アロー・ダイヤグラムの例

与えられたアロー・ダイヤグラムから，最低限必要な日数や，各作業の余裕時間などを求めることによってプロジェクトの計画や進行管理に利用する手法を PERT(Program Evaluation and Review Technique) と呼ぶ．

### 1.3 組合せ最適化問題

問題 1.1 では，変数  $x_i$  は非負の全ての実数を取り得た．つまり，最適な解として  $x_1 = 3.5$  などでもよしとした．しかし，生産する製品が 1 単位ごとでないという意味のないものである場合，問題 1.1 のような定式化では最適な生産計画を与えない．

そこで，変数が整数値しか取り得ないように定式化する必要がある．このとき，

$$\text{目的関数： } \mathbf{c}^T \mathbf{x} \rightarrow \text{最大化}$$

$$\text{制約条件： } \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

となる．このような問題を \_\_\_\_\_ という．

[問題 1.5] いま， $n$  個の品物のうちからいくつかを選んでナップザックにつめてハイキングに持っていくことを考える．それぞれの品物の重さは  $a_1, \dots, a_n$  (グラム) で，ナップ

ザックには合計  $b$  グラムまでしか入れられない．それぞれの品物の利用価値が  $c_1, \dots, c_n$  で表されているとき，利用価値の総計が最大になるように品物を選ぶにはどうしたらよいか？

[数学的定式化] 変数を

$$x_i = \begin{cases} 1 & i \text{ 番目の品物を持って行く} \\ 0 & i \text{ 番目の品物を持って行かない} \end{cases}$$

としたとき，この問題は

目的関数： \_\_\_\_\_ → 最大化

制約条件： \_\_\_\_\_

と定式化できる．この問題は整数計画問題の一種と考えることができるが，変数が 0 または 1 しか取らないような問題を特に \_\_\_\_\_ といい，その中でもこの問題のように制約条件が 1 つしかないような問題を \_\_\_\_\_ という．

0-1 問題のように変数の取りうる値が離散的で有限個である場合，最適解は有限個の解（値の組合せ）の中の 1 つであるので，このような問題を \_\_\_\_\_ ともいう．

## 1.4 非線形計画問題

[問題 1.6] 図 1.5 のようなネットワークで表される道路網を考える．郊外の A から都心部の D へ向かって  $w$  台の車が出発するとき，どのような経路を通って行けば道路網の効率利用の観点から望ましいか？道路網の効率を示す尺度は，通行に要するのべ時間とする．

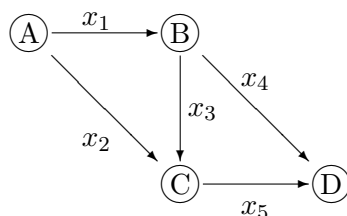


図 1.5: 道路網と交通量

[定式化] 変数は，各辺を通る車の台数  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$  とする．すると，各節点における

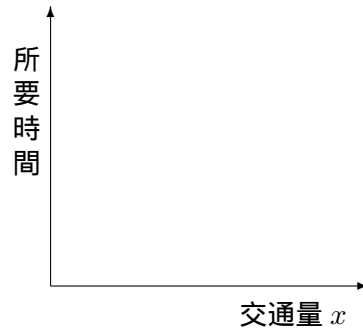


図 1.6: 交通量と所要時間の関係

条件から

$$\text{節点 A:} \quad x_1 + x_2 = w$$

$$\text{節点 B:} \quad x_1 - x_3 - x_4 = 0$$

$$\text{節点 C:} \quad \underline{\hspace{2cm}} = 0$$

$$\text{節点 D:} \quad \underline{\hspace{2cm}} = w$$

ここで、節点 D における式は他の 3 つの式から得られることに注意。また、それぞれ車の台数は非負であるから、

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad \dots, \quad x_5 \geq 0$$

これらの 1 次の等式および非負条件が                                  となる。

次に、目的関数について考える。ある道路を通行する際の所要時間はその道路の交通量に依存する。その道路を通行している車の台数が  $x$  であるときに道路  $i$  の通行所要時間を  $f_i(x)$  とすると、目的関数は

$$x_1 f_1(x_1) + x_2 f_2(x_2) + \dots + x_5 f_5(x_5)$$

となる。ここで  $f_i(x)$  は一般に図 1.6 に示すように、ある一定の  $x$  までは一定値、それより  $x$  が大きくなると急激に  $f(x)$  は増加する（渋滞状態）ような非線形関数と考えられる。問題の目的は、この非線形関数を最小化することである。

このように、制約条件や目的関数が非線形関数で表されている問題を、                                  
                                 という。

## 1.5 まとめ

数理計画問題は一般に

目的関数：  $f(\mathbf{x}) \rightarrow$  最大化（あるいは最小化）

制約条件：  $\mathbf{x} \in S$

と定式化される．ただし， $\mathbf{x}$  は  $n$  次元実ベクトル， $f$  は  $n$  次元実ベクトル空間上で定義され実数値をとる関数， $S$  は  $n$  次元実ベクトル空間の部分領域である．

## 1.6 演習問題

- 2つの工場  $A_1, A_2$  で同じ製品を生産し，3つの取引先  $B_1, B_2, B_3$  へ納入している会社がある．各取引先からの注引量，各工場における生産量は，表 1.3 の (a), (b) のとおりである．また，各工場から各取引先までの製品 1 単位あたりの輸送コストは同表 (c) に示してある．総輸送コストが最少になるようにするには，どのように輸送計画を立てればよいか．この問題を数理計画問題として定式化せよ．

表 1.3: 輸送問題におけるデータ

| (a) 注引量 |    | (b) 生産量 |    | (c) 輸送コスト |       |       |       |
|---------|----|---------|----|-----------|-------|-------|-------|
| $B_1$   | 70 | $A_1$   | 90 |           | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ |
| $B_2$   | 40 | $A_2$   | 80 | $A_1$     | 4     | 7     | 12    |
| $B_3$   | 60 |         |    | $A_2$     | 11    | 6     | 3     |

- 問題 1.6 では各辺に交通量として変数  $x$  を割り当てた（図 1.5）．同じ問題に対して図 1.7 のようにパスに変数  $y_1, y_2, y_3$  を割り当てると，どのように定式化されるか．
- いま，ある資産家が  $w$  円の資産を 3 種類の株式  $A_1, A_2, A_3$  に分散して投資しようとしている．各株式の 1 ヶ月後の収益率はそれぞれ未知であるが，これを確率変数として  $R_1, R_2, R_3$  とする．ただし，収益率は

$$[\text{収益率}] = \frac{[1 \text{ ヶ月後の株価}] - [\text{現在の株価}]}{[\text{現在の株価}]}$$

である．変数  $x_1, x_2, x_3$  を各株式への投資額としたとき，次の問に答えよ．

- 制約条件の式を作れ．

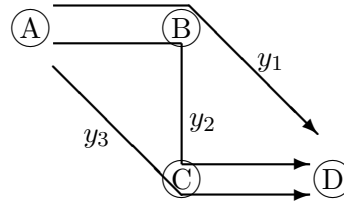


図 1.7: パスごとに交通量を割り当てた交通網

- (b) 1ヶ月後の資産総額  $W$  を式で表せ．また，1ヶ月後に得られる利益  $Z$  を式で表せ．ここで， $W$  や  $Z$  は確率変数であることに注意．

投資家としては利益を最大にしたいが， $R_i$  は確率変数であるから取り扱うことができない．そこで，以下のように考える．利益が  $z$  である時に，投資家が「うれしい」と思う度合を効果関数  $u(z)$  で表し， $u(z)$  の期待値が最大となる投資方法を求めることを目的とする．したがって，目的関数は

$$E[u(Z)] \rightarrow \text{最大化}$$

と書ける．

- (c) 効果関数が  $u(z) = \alpha z$  で表せるとき，目的関数はどうなるか？ただし，収益率  $R_1, R_2, R_3$  の期待値は既知で  $r_1, r_2, r_3$  であるとする．
- (d) 一般に，利益が増加したときの「うれしさ」の増加は，利益が小さいときには大きく，利益が大きいときには小さくなる．これを表すために効果関数を  $u(z) = z - \beta z^2$  で表わそう．このとき，目的関数はどうなるか？ただし，収益率  $R_1, R_2, R_3$  の期待値と分散は既知でそれぞれ  $r_1, r_2, r_3$  と  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  とし，また  $R_i$  と  $R_j$  の共分散  $E[(R_i - r_i)(R_j - r_j)]$  は  $\sigma_{ij}$  で与えられているとする．



## 1.7 演習問題の答え

1. 工場  $A_i$  から取引先  $B_j$  へ輸送する量を  $x_{ij}$  (単位) とすると,

$$\text{目的関数: } 4x_{11} + 7x_{12} + 12x_{13} + 11x_{21} + 6x_{22} + 3x_{23} \rightarrow \text{最小化}$$

$$\text{制約条件: } x_{11} + x_{21} = 70$$

$$x_{12} + x_{22} = 40$$

$$x_{13} + x_{23} = 60$$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 90$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 80$$

$$x_{11}, x_{12}, \dots, x_{23} \geq 0$$

2. 以下のとおり.

$$\begin{aligned} \text{目的関数: } & (y_1 + y_2)f_1(y_1 + y_2) + y_3f_2(y_3) + y_2f_3(y_2) + y_1f_4(y_1) \\ & + (y_2 + y_3)f_5(y_2 + y_3) \rightarrow \text{最小化} \end{aligned}$$

$$\text{制約条件: } y_1 + y_2 + y_3 = w$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

3. (a)  $x_1 + x_2 + x_3 = w$ ,  $x_1 \geq 0$ ,  $x_2 \geq 0$ ,  $x_3 \geq 0$ .

$$(b) W = (R_1 + 1)x_1 + (R_2 + 1)x_2 + (R_3 + 1)x_3,$$

$$Z = W - w = R_1x_1 + R_2x_2 + R_3x_3.$$

- (c)  $u(z) = \alpha z$  のとき,

$$\begin{aligned} E[u(Z)] &= \alpha(E[R_1]x_1 + E[R_2]x_2 + E[R_3]x_3) \\ &= \alpha(r_1x_1 + r_2x_2 + r_3x_3) \end{aligned}$$

(したがって, この問題は線形計画問題となる.)

- (d)  $u(z) = z - \beta z^2$  のとき,

$$\begin{aligned} \sigma_i &= E[(R_i - r_i)^2] \\ &= E[R_i^2] - 2r_iE[R_i] + r_i^2 = E[R_i^2] - r_i^2 \\ \sigma_{ij} &= E[(R_i - r_i)(R_j - r_j)] \\ &= E[R_i r_j] - r_iE[R_j] - r_jE[R_i] + r_i r_j \\ &= E[R_i R_j] - r_i r_j \end{aligned}$$

に注意すれば ,

$$\begin{aligned}
 E[u(Z)] &= E[R_1x_1 + R_2x_2 + R_3x_3 - \beta(R_1^2x_1^2 + R_2^2x_2^2 + R_3^2x_3^2 \\
 &\quad + 2(R_1R_2x_1x_2 + R_1R_3x_1x_3 + R_2R_3x_2x_3))] \\
 &= r_1x_1 + r_2x_2 + r_3x_3 - \beta((\sigma_1 + r_1^2)x_1^2 + (\sigma_2 + r_2^2)x_2^2 + (\sigma_3 + r_3^2)x_3^2) \\
 &\quad - 2\beta((\sigma_{12} + r_1r_2)x_1x_2 + (\sigma_{13} + r_1r_3)x_1x_3 + (\sigma_{23} + r_2r_3)x_2x_3)
 \end{aligned}$$

となる (これは非線形計画問題となる.)