

NPDA と文脈自由文法の等価性

前回の授業でやったこと：

- 文脈自由文法 G から $L(G) = T(M)$ となる、NPDA M を構成する方法
- NPDA M から $T(M) = N(M')$ となる NPDA M' を構成する方法

今日やること：

NPDA M から $N(M) = L(G)$ となる文脈自由文法 G を構成する方法を説明

これらのことから、文脈自由言語は NPDA で受理でき、NPDA が受理する言語は文脈自由言語であることがわかる

NPDA が受理する言語を生成する文法

空スタックで言語を受理する NPDA

$M = (K, T, V, p, q_0, \perp)$ (但し $K = \{q_0, \dots, q_n\}$) について $N(M) = L(G)$ となる文法を作る

$A \in V$ について文法 G の非終端記号 A^{ij} を、 M が状態 q_i にありスタックトップが A である場合に、 q_j に遷移しながらスタックの2番目より下を変えないで A を消費したときに、 M が読み込む記号列を A^{ij} が生成するようにしたい。

q_i から q_j に A を消費つつ遷移する状況には次の2通りがありえる：

(1) $\alpha \in T \cup \{\epsilon\}$ とする。 $(q_j, \epsilon) \in p(q_i, \alpha, A)$, つまり、 q_i から q_j に直接遷移するときにスタックから A を除き α を読む場合。このとき

$A^{ij} \rightarrow \alpha$

という生成規則を作る

(2) $(q_k, B_1 B_2 \cdots B_m) \in p(q_i, \alpha, A)$, つまり、 q_i から一旦 q_k ($q_k = q_j$ でもよい) に遷移するときにスタックから A を除き $B_1 \cdots B_m$ を積んで α を読んだあと、スタックに新たに積まれた $B_1 \cdots B_m$ を除きながら q_j に遷移する場合。このとき、すべての $0 \leq \ell_1, \ell_2, \dots, \ell_{m-1} \leq n$ を満たす整数の組について

$$A^{ij} \rightarrow \alpha B_1^{k\ell_1} B_2^{\ell_1\ell_2} \cdots B_m^{\ell_{m-1}j}$$

という生成規則を作る。もし $m = 1$ なら

$$A^{ij} \rightarrow \alpha B_1^{kj}$$

上記の生成規則の集合に

$$S \rightarrow \perp^{00} | \perp^{01} | \cdots | \perp^{0n}$$

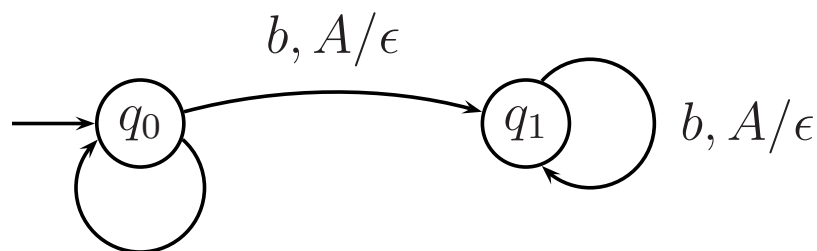
という規則を付け加えた集合を P とする。文法 $G = (N, T, P, S)$, 但し

$$N = \{S\} \cup \{A^{ij} \mid A \in V, 0 \leq i, j \leq n\}$$

は $L(G) = N(M)$ を満たす

NPDA から文脈自由文法の構成例

以下のような NPDA を考える。スタックに最初にある記号は B とする。



について生成規則を作ってみる。やり方として、遷移の矢印に対応する生成規則を作っていくとやりやすいと思われる

$$S \rightarrow B^{00} | B^{01}$$

q_0 から q_0 への遷移でスタックトップが B のときに注目して

$$B^{00} \rightarrow aA^{00} \text{ (} q_0 \text{ から } q_0 \text{ に遷移しつつ } B \text{ を消費)}$$

$$B^{01} \rightarrow aA^{01} \text{ (} q_0 \text{ から } q_1 \text{ に遷移しつつ } B \text{ を消費)}$$

q_0 から q_0 への遷移でスタックトップが A のときに注目して

$$A^{00} \rightarrow aA^{00}A^{00} | aA^{01}A^{10} \text{ (} q_0 \text{ から } q_0 \text{ に遷移しつつ } A \text{ を消費)}$$

$$A^{01} \rightarrow aA^{00}A^{01} | aA^{01}A^{11} \text{ (} q_0 \text{ から } q_1 \text{ に遷移しつつ } A \text{ を消費)}$$

次に q_0 から q_1 への遷移でスタックトップが A のときに注目して

$A^{01} \rightarrow b$ (q_0 から q_1 に遷移しつつ A を消費)

次に q_1 から q_1 への遷移でスタックトップが A のときに注目して

$A^{11} \rightarrow b$ (q_1 から q_1 に遷移しつつ A を消費)

このままでもよいが無用な記号を除去する。 A^{00} , A^{10} , B^{00} は書き換えても終端記号だけからなる列は得られないから、これらを含む生成規則を除去すると

$S \rightarrow B^{01}$,

$B^{01} \rightarrow aA^{01}$,

$A^{01} \rightarrow aA^{01}A^{11}|b$,

$A^{11} \rightarrow b$

$a^n b^n$ を生成する文法であることがわかる

演習問題

問題 63 $M = (\{q_0, q_F\}, \{0, 1\}, \{X, \perp\}, p, q_0, \perp)$,

$$p(q_0, 0, \perp) = \{(q_0, X\perp)\}$$

$$p(q_0, 0, X) = \{(q_0, XX)\}$$

$$p(q_0, 1, X) = \{(q_0, X)\}$$

$$p(q_0, \epsilon, X) = \{(q_F, \epsilon)\}$$

$$p(q_F, \epsilon, X) = \{(q_F, \epsilon)\}$$

$$p(q_F, 1, X) = \{(q_F, XX)\}$$

$$p(q_F, 1, \perp) = \{(q_F, \epsilon)\}$$

で与えられる NPDA M について $N(M) = L(G)$ となる文脈自由文法 G を (N, T, P, S) の形式で書け。できるだけ無用な生成規則は除去すること。

問題 64 前回演習で間違いが有った場合、×にされた理由がわかったかどうか／納得できたかどうか書いて下さい。また今日の授業でわかりにくい所や要望を書いて下さい。

教科書の間違いの訂正

教科書 109 ページの証明に以下のような間違いがある。

109 ページ下から 6 行目： $p(k_i, A, a)$, $k_i \in K$, $A \in V$, $a \in T \cup \{\epsilon\}$ が $(k_j, B_1 B_2 \cdots B_m)$, $k_j \in K$, $B_1, B_2, \dots, B_m \in V$ を含むとき、生成規則

$$A^{ij} \rightarrow a B_1^{in_1} B_2^{n_1 n_2} \cdots B_m^{n_m j}$$

を $1 \leq n_1, n_2, \dots, n_{m-1} \leq n$ のすべてに対してつくる。

・上の部分で $B_1^{in_1} B_2^{n_1 n_2} \cdots B_m^{n_m j}$ は状態 k_j から k_j に遷移する間に消されるので、 $B_1^{in_1}$ は $B_1^{jn_1}$ でなければならない。

・ $p(k_i, A, a)$ が $(k_\ell, B_1 B_2 \cdots B_m)$ を含む、言い替えると k_i から k_ℓ に遷移した後 k_j に到達する場合が抜けている

110 ページ 1 行目： A^{1n} は A_1^{1n} であるべき