

プッシュダウンオートマトン

ある記号列 w が文脈自由言語に属するかどうか判定するための機械 (仕組み) が欲しい

決定性有限オートマトン (DFA) では, $L = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$ を受理できない. DFA を少し変更して L を受理できる仕組みを作りたい

L を受理するためには a が何個現れたか記憶する容量に制限がない記憶領域が必要

DFA にスタックと呼ばれる単純な記憶領域を付け加えると, 記号列が文脈自由言語に属するかどうか判定する機械を作れる

スタック

とはデータ (記号) を一列に積み上げた山である

<i>A</i>
<i>B</i>
<i>A</i>

スタックに行える操作は

- push – 新しいデータを山の一番上に積み上げる
- pop – 山の一番上のデータを取り除く

上記スタックに *C* を push した後のスタックは

<i>C</i>
<i>A</i>
<i>B</i>
<i>A</i>

プッシュダウンオートマトン (NPDA)

ϵ 遷移を持つ非決定性有限状態オートマトンに 1 本のスタックを付加したもの

各状態で、入力とスタックの一番上を見て、状態遷移とスタックの操作を行う

NPDA は nondeterministic pushdown automaton の略

$L = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$ を受理する NPDA の例

q_a : それまでの入力がすべて a である状態

q_b : b が出て来た後の状態

q_F : 最終状態

スタックは最初に $\perp$ だけが入っている

q_a での動作: a を読んだらスタックに A を push して

q_a に状態遷移,

b を読んだらスタックを pop して q_b に状態遷移

q_b での動作: スタックの一番上が A で入力が b なら, スタックを pop して q_b に遷移,

スタックの一番上が $\perp$ なら記号列を読まずにスタックを pop して q_F に遷移

NPDA の記号による表現

NPDA は 7 つ組 $M = (K, T, V, p, q_0, A_0, F)$ で表される．各要素の意味は以下の通り：

K : 状態の集合

T : 入力アルファベット (入力記号の集合)

V : スタックアルファベット (スタックに積む記号の集合)

p : 遷移関数． $K \times (T \cup \{\epsilon\}) \times V$ という集合から $K \times V^*$ の有限部分集合の集合への関数

q_0 : 出発状態

A_0 : 出発記号．スタックに最初に積んである記号． $\perp$ で表すことが多い

F : 最終状態の集合

p の意味： $p(q, a, A) \ni (q', A_1 A_2 \cdots A_n)$ は状態 q , スタックの一番上が A のときに記号 a を読んだ場合，スタックを pop した後 $A_n, A_{n-1}, \dots, A_1$ の順番で記号を push し状態 q' に遷移することを表す． a が空列ならば同じ操作を記号を読まずに行う．上記の操作

でスタック

$\vdots$

 は

$\vdots$
A_n
$\vdots$

 になる

記号による表現の例

$L = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$ を受理する NPDA の例

q_a : それまでの入力がすべて a である状態

q_b : b が出て来た後の状態

q_F : 最終状態

スタックは最初に $\perp$ だけが入っている．これを記号で表すと

$(\{q_a, q_b, q_F\}, \{a, b\}, \{A, \perp\}, p, q_a, \perp, \{q_F\})$

$p(q_a, a, \perp) = \{(q_a, A\perp)\}$

$p(q_a, a, A) = \{(q_a, AA)\}$

$p(q_a, b, A) = \{(q_b, \epsilon)\}$

$p(q_b, b, A) = \{(q_b, \epsilon)\}$

$p(q_b, \epsilon, \perp) = \{(q_F, \epsilon)\}$

それ以外の引数のときに p の値は空集合

NPDA の時点表示

PDA の時点表示 (instantaneous description) とは 3 つ組 (q, w, γ) である . 但し q は NPDA のその時点での状態を表し , w は NPDA がこれから読む記号列を表し , γ はその時点でのスタックを底の方を右にして書いた記号列である .

NPDA がどのような状態にあるかは時点表示で記述できる

NPDA M が , ある時点表示 (q, w, γ) から別の時点表示 (q', w', γ') に 1 回の遷移関数の適用で移れることを $(q, w, \gamma) \vdash_M (q', w', \gamma')$ と書く . 同様に 0 回以上の遷移関数の適用で移れることを $(q, w, \gamma) \vdash_M^* (q', w', \gamma')$ で表す . M が何か書かなくてもわかる場合は省略する .

前の OHP で $aabb$ を受理するまでの過程は

$$\begin{aligned}(q_a, aabb, \perp) &\vdash (q_a, abb, A\perp) \\ &\vdash (q_a, bb, AA\perp) \\ &\vdash (q_b, b, A\perp) \\ &\vdash (q_b, \epsilon, \perp) \\ &\vdash (q_F, \epsilon, \epsilon)\end{aligned}$$

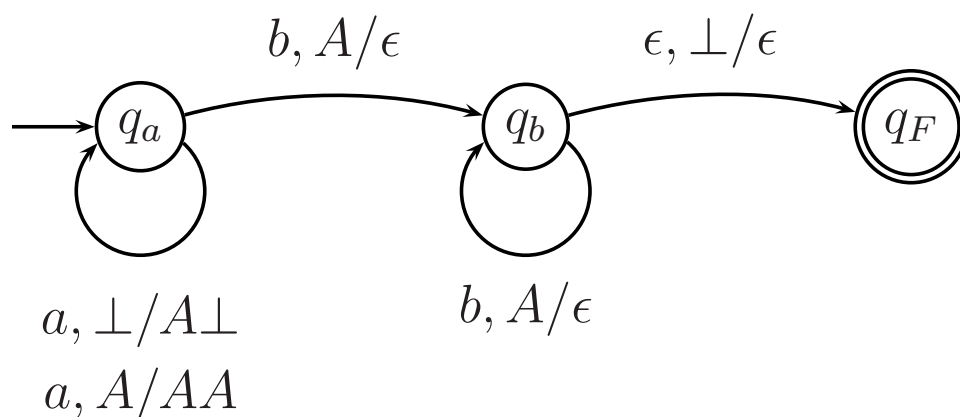
NPDA の図による表現

ϵ -NFA は図で表すことができたが，NPDA も似たような図による表現がある．

NFA の図による表現は，矢印にその状態遷移を引き起こす入力記号または ϵ を添えて書いたが，NPDA では矢印に

「入力記号，スタックの一番上 / スタックに push する記号列」

を添えて書く．今まで例に出た NPDA は



一つの矢印に 2 組以上の入力記号とスタック記号の組が対応する場合，縦に重ねて書く．図による NPDA の表現では，スタックに最初からある記号が何であるか示されないことに注意．

NPDA が受理する言語の二つの定義

$M = (K, T, V, p, q_0, \perp, F)$: NPDA

$T(M)$: M を最終状態のどれかに遷移させる記号列の集合

$$T(M) = \{w \in T^* \mid (q_0, w, \perp) \vdash^* (q_F, \epsilon, \gamma), q_F \in F, \gamma \in V^*\}$$

$N(M)$: 記号列 w を最後まで読んだときに M のスタックを空にする記号列 w の集合

$$N(M) = \{w \in T^* \mid (q_0, w, \perp) \vdash^* (q, \epsilon, \epsilon), q \in K\}$$

ある固定された M について $T(M) = N(M)$ とは限らない。しかし, M から $T(M) = N(M')$ および $N(M) = T(M'')$ となる M' と M'' を構成できる。従ってどちらの定義を用いても NPDA で受理できる言語の集合は同じである。この授業では M が受理する言語の定義として $T(M)$ を用いる

演習問題

問題 52 言語 $\{w \in \{a, b\}^+ \mid w \text{ を左から読んでも右から読んでも同じ} \}$ を受理する NPDA を図で書け．受理する言語の定義は $T(M)$ の方を使うこと．(注意：教科書 103 ページに書いてある NPDA の例とは受理する言語が少し違うから，103 ページの例を丸写しすると不正解)

問題 53 問 52 で解答した NPDA が記号列 aba を受理する過程を時点表示で書け

問題 54 問 52 で解答した NPDA が記号列 aa を受理する過程を時点表示で書け

問題 55 問 52 で解答した NPDA が記号列 a を受理する過程を時点表示で書け

問題 56 問 52 で解答した NPDA が空列 ϵ を受理しないことを説明せよ

問題 57 問 52 で解答した NPDA を記号で書け

問題 58 $L = \{a^i b^j c^i d^j \mid i, j \geq 0\}$ が文脈自由言語ではないことを証明せよ。

問題 59 前回演習で間違いが有った場合、×にされた理由がわかったかどうか / 納得できたかどうか書いて下さい。また今日の授業でわかりにくい所や要望を書いて下さい。