今後の日程

11/29(水) 休講
12/6(水), 12/8(金) 授業
12/13(水) 中間テスト
12/15(金), 12/20(水) 授業

ある言語が正規言語ではないこと

ある言語が正規言語ではないことを証明させる問題が、オートマトンに関連する大学院入試問題によく出る。

教科書に書いてあるポンプの補題は、以下のポンプの補題に比べて条件が一つ足りない。
以下で $|x|$ は記号列 x の長さを表す。

ポンプの補題 (正規言語の反復補題)

L を正規言語とし、 L を受理する DFA M_L の状態数を n とする。また $z \in L$ の長さが n 以上であるとする。(z は長さ n 以上なら何でも OK) このとき、ある記号列 w, x, y (但し $|x| \geq 1$ <u>かつ $|wx| \leq n$</u>) が存在して、$z = wxy$ かつすべての $i \geq 0$ に対して $wx^iy \in L$ が成り立つ。
(注意：$w = \epsilon$ または $y = \epsilon$ であっても構わない)

証明： M_L の状態集合を $\{q_1, \ldots, q_n\}$ とし、出発状態を q_1 とする。状態数 が n で記号 z の長さが n 以上なので、M_L が z を受理するときに、2 回以上通過する状態が 1 つ以上ある。これらうち**最初に 2 回通過する状態**を q_k とする。

$$q_1 \xrightarrow{w} q_k \xrightarrow{x} q_k \xrightarrow{y} q_\ell$$

とする。但し q_ℓ は z を M_L が受理したときの最終状態。**また、状態数が n なので、2 回目に q_k に到達するまでに DFA が読み込む記号の数は n 個以下である。したがって** $|wx| \leq n$

上の式から、wx^iy も受理されることがわかる。

ポンプの補題の使用例

ポンプの補題を用いて、ある言語 L が正規言語ではないことを証明するには

1. 言語 L を受理する DFA の状態数 n を固定する。状態数をどのような記号 (例えば n) で表すか書かないと減点
2. 言語 L からポンプの補題が成り立たない記号列 z を選ぶ。z の長さは n 以上でないとポンプの補題を使えないから、z は n の値によって変わる記号列として定義する必要がある
3. $z = wxy$ (但し $|x| \geq 1$, $|wx| \leq n$) と分ける分け方をすべて場合分けする
4. z の各々の分け方について $wx^iy \notin L$ となる i を明示する

$L = \{a^m b^m \mid m = 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ は正規言語ではないことの証明

L が状態数 n の DFA で受理されると仮定して矛盾を導く (ステップ 1)。

ポンプの補題より、$a^n b^n = wxy$ かつ $wx^2y = a^{m'} b^{m'}$ となる w, x, y および m' が存在する。(これがステップ 2 でポンプの補題が成り立たない記号列 z として $a^n b^n$ を選んでいる)

ここで $a^n b^n = wxy$ と分ける分け方は、$|wx| \leq n$ だから x が a だけから構成される分け方しか無い (ステップ 3)。

このとき、wx^2y に含まれる a と b の数が違うため $wx^2y \notin L$ である (ステップ 4)。したがって L は正規言語であるという最初の仮定が間違っていたことになる。(証明終)

正規文法の空問題

ある正規文法 G が与えられた時に、$L(G)$ が空集合かどうか判定する問題を「正規文法に対する空問題」と呼ぶ。
空問題は以下のようにして計算機で自動的に解くことができる。

1. $L(G)$ を受理する DFA M_G を作る。M_G の状態数を n とする。

2. 長さ n 未満の記号列すべてについて M_G で受理されるか調べ、受理される記号列が無ければ $L(G) = \emptyset$

$L(G) \neq \emptyset$ ならば、$L(G) \ni z$ が存在する。ポンプの補題より $|z| \geq n$ ならば $z = wxy$ と分けたとき wy も $L(G)$ に属し wy の長さは z より短くなる。wy の長さが n 以上なら同じ議論でより短い $L(G)$ に属する記号列を見付けることができる。

したがって $L(G) \neq \emptyset$ なら長さ n 未満の $L(G)$ に属する記号列が存在する。したがって $L(G)$ が空集合かどうか調べるためには、長さ n 未満の記号列が $L(G)$ に属するかどうかしらみ潰しに調べればよい。

正規文法の有限問題

ある正規文法 G が与えられたときに、$L(G)$ が有限集合かどうか判定する問題。以下の手順で判定できる。

1. $L(G)$ を受理する DFA M_G を作る。M_G の状態数を n とする。

2. 長さ n 以上 $2n-1$ 以下の記号列すべてについて M_G で受理されるか調べ、受理される記号列が無ければ $L(G)$ は有限集合。有れば $L(G)$ は無限集合。

「$L(G)$ に長さ n 以上 $2n-1$ 以下の記号列 z が存在する」$\Longrightarrow$「$L(G)$ は無限集合」 の証明：
$z = wxy$ として $wy, wxy, wx^2y, \ldots$ が $L(G)$ に含まれるので、$L(G)$ は無限集合

「$L(G)$ に長さ n 以上 $2n-1$ 以下の記号列 z が存在する」$\Longleftarrow$「$L(G)$ は無限集合」 の証明：
次の OHP に続く

「$L(G)$ に長さ n 以上 $2n-1$ 以下の記号列 z が存在する」$\Longleftarrow$「$L(G)$ は無限集合」 の証明：

$L(G)$ の要素 z で長さ n 以上の記号列を一つ選ぶ。ポンプの補題を適用して $z = wxy$ と分ける。このとき x の長さを n 以下になるように x を選べる。

wy の長さは z にくらべて 1 以上 n 以下短かくなっている。z の長さが $2n$ 以上の場合、より短い $L(G)$ に属する記号列を見付ける手続きを繰り返して、長さ n 以上 $2n-1$ 以下の $L(G)$ の記号列を見つけることができる。

正規文法の同値問題

二つの正規文法 G_1, G_2 が有ったときに、$L(G_1) = L(G_2)$ かどうか判定する問題

1. G_1 を受理する最小 DFA M_1, G_2 を受理する最小 DFA M_2 を作る
2. $M_1 = M_2$ かどうか調べる

演習問題

演習問題 39 a と b を同数含む記号列 $w \in \{a, b\}^*$ からなる言語を L_{39} とする。L_{39} が正規言語ではないことを証明せよ。(なるべく授業でやった証明の書き方を真似して解いて下さい)

演習問題 40 前回演習で間違いが有った場合、×にされた理由がわかったかどうか／納得できたかどうか書いて下さい。また今日の授業でわかりにくい所や要望を書いて下さい。