

正規文法とオートマトンの関係

重要なお知らせ：11月1日は松本の出張のため休講とします

L を任意に固定された言語とする

- 条件 P_G : L を生成する正規文法が存在する
- 条件 P_D : L を受理する決定性有限オートマトン (DFA) が存在する
- 条件 P_N : L を受理する非決定性有限オートマトン (NFA) が存在する

の関係はどうなっているのか？NFA で受理できるが DFA で受理できない場合などがありそうに思われる。

しかし、これら3つの条件は同値である。今回の授業は3つの条件が同値であることを証明する

- もし P_G ならば P_N
- もし P_N ならば P_D
- もし P_D ならば P_G

の3つの命題を証明すればよい

もし P_G ならば P_N

「もしある言語 L が正規文法 G によって生成されるなら、 L を受理する NFA M が存在する」ことを示せば良い。

任意の G に対して $L(G) = T(M_N)$ となる NFA M_N の作り方が有ればよい

M_N の作り方は前回の授業でやった (証明終)

もし P_N ならば P_D

「もしある言語 L が NFA M_N によって受理されるなら、 L を受理する DFA M_D が存在する」ことを示せば良い。

与えられた NFA $M_N = (K_N, T_N, t_N, S_N, F_N)$ から同じ言語を受理する DFA を作る

考え方：NFA では遷移関数の行き先状態が 2 つ以上あるので非決定性になっている。ここで行き先状態の集合を 1 つの状態だと思えば、決定性オートマトンである。



NFA の状態の集合を状態とする DFA をつじつまが合うように作ればよい

NFA から DFA を作る方法

NFA $M_N = (K_N, T_N, t_N, S_N, F_N)$ から

DFA $M_D = (K_D, T_D, t_D, S_D, F_D)$ を作る

$T_D = T_N$ としてよい

DFA の状態は NFA の状態の集合にしたいから

$K_D = 2^{K_N}$ とする

DFA の遷移関数 t_D を t_N から作りたい

NFA の状態の集合 $X \subset K_N$, $a \in T_N = T_D$ が有ったとき $t_D(X, a)$ をどう決めればよいか？

X に含まれる状態から NFA の遷移関数で記号 a で移る状態の集合を $t_D(X, a)$ の値とすればつじつまがあう。同じ意味の記号で書くと

$$t_D(X, a) = \bigcup_{A \in X} t_N(A, a)$$

DFA の最終状態は、NFA の最終状態を含む状態集合にすればよい。このことを同じ意味の記号で書くと

$$F_D = \{X \in 2^{K_N} \mid X \cap F_N \neq \emptyset\}$$

DFA の出発状態 S_D は $\{S_N\}$ とすればよい

NFA から DFA を作る方法 2

前 OHP で説明した方法で一応 DFA ができるが、

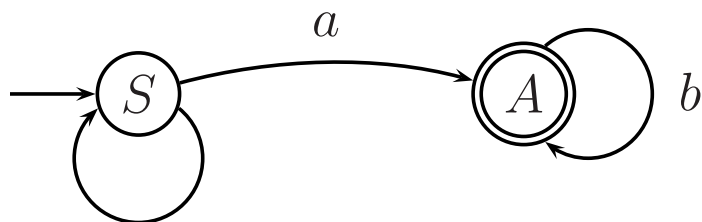
- 状態の数が指数的に大きくなる
- 各状態からすべての記号のラベルを持つ矢印が出て矢印が多くなる

ので手作業で DFA を作るときに辛い。

- 元の NFA である状態から矢印が出ていない記号は、新しい DFA で空集合 $\emptyset$ に遷移する。空集合からそれ以外の状態への遷移は無い。従って空集合の状態と空集合への遷移は無視してよい
- DFA の開始状態から到達できない状態は意味が無いので無視してよい

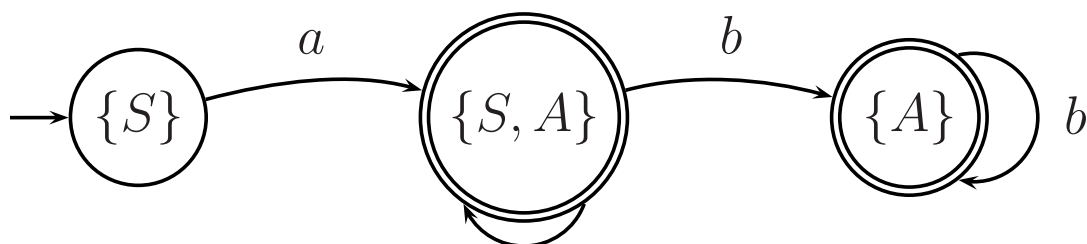
DFA の開始状態 $\{S_N\}$ から到達できる状態だけ、作れば良い

NFA を DFA に変換する例



$K_N = \{S, A\}$ なので

K_D を 2^{K_N} から空集合を除いた $\{\{S\}, \{A\}, \{S, A\}\}$ とする



出発状態 $\{S\}$ から a で行ける状態を考えると $\{S, A\}$ である

b で行ける状態は無いから、DFA に状態を付け加えない

状態 $\{S, A\}$ から a で行ける状態は、元の NFA の S から a 行ける状態の集合 $\{S, A\}$ と A から a 行ける状態の集合 $\emptyset$ の和集合 $\{S, A\}$ である

状態 $\{S, A\}$ から b で行ける状態は、元の NFA の S から b 行ける状態の集合 $\emptyset$ と A から b 行ける状態の集合 $\{A\}$ の和集合 $\{A\}$ である。以下同様

DFA を正規文法に変換する方法

DFA $M = (K, T_D, t, q_0, F)$ に対し
正規文法 $G = (N, T_G, P, S)$ を

$$T_G = T_D$$

$$N = K$$

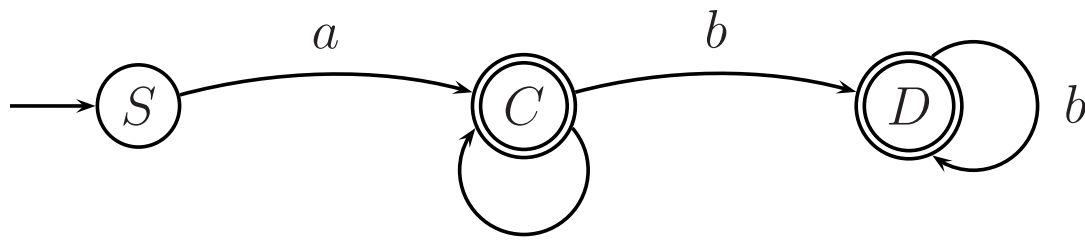
$$S = q_0$$

生成規則の集合は以下のように作る

1. DFA の最終状態 $A \in F$ に対応して $A \rightarrow \epsilon$ を追加
2. DFA に $t(A, a) = B$ という遷移があれば $A \rightarrow aB$ を追加

DFA から正規文法に変換する例

さっきの OHP で作った DFA の記号を置き換えた DFA



対応する正規文法は

$$G = (\{S, C, D\}, \{a, b\}, P, S)$$

1. DFA の最終状態に対応して $C \rightarrow \epsilon$ と $D \rightarrow \epsilon$ を P に追加
2. 遷移に対応して $S \rightarrow aC$, $C \rightarrow aC$, $C \rightarrow bD$, $D \rightarrow bD$ を P に追加

従って $P = \{C \rightarrow \epsilon, D \rightarrow \epsilon, S \rightarrow aC, C \rightarrow aC, C \rightarrow bD, D \rightarrow bD\}$

演習問題

前回演習へのコメント：

- 非決定性オートマトンで遷移関数の値が空集合のときにそのことを明示して下さい。例えば「それ以外の引数に対して t の値は空集合」など
- 1 文字の記号 a を n 回並べた記号列を a^n と書きます。この表記法を用いて言語を記述して構いません。例えば $\{ab^n | n \geq 2\}$ のように。

今回から A4 の紙 (ルーズリーフを除く) で提出した答案は減点します。

昨年度よくあった間違い

- 集合 A と集合 B が有ったときに「 A と B の和集合」を「 A または B 」とは書きません。
- NFA の遷移関数 t の定義で $t(q, a) = \{A\}$ ではなく $t(q, a) = A$ と書いている人が多かった。
- NFA の遷移関数で、遷移先が無い状態と記号の組には遷移関数の値として空集合を割り当てることを明記して下さい。

- NFA を変換してできる DFA の遷移関数の値は状態の集合になりますが、DFA の状態に空集合が無いときに遷移関数の値を空集合にしてはいけません。

演習問題 20 正規文法 $G_{20} = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$

$$P = \{S \rightarrow aB \mid aC, \quad B \rightarrow b \mid bB, \\ C \rightarrow \epsilon \mid cC\}$$

が生成する言語を書け。記号で書けない場合日本語または英語で説明してもよい。

演習問題 21 G_{20} から前に説明した方法で NFA を作り、グラフと (K, T, t, q_0, F) の両方の形式で書け。

演習問題 22 問 21 で作った NFA を説明した方法で DFA に変換し、グラフと (K, T, t, q_0, F) の両方の形式で書け。

演習問題 23 問 22 で作った DFA から説明した方法で正規文法を作れ

演習問題 24 前回演習で間違いが有った場合、×にされた理由がわかったかどうか / 納得できたかどうか書いて下さい。今日の授業でわかりにくい所や要望を書いて下さい