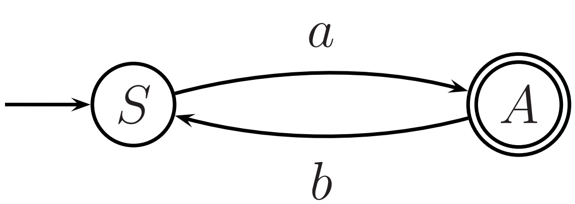
決定性有限オートマトンの例

正規文法が与えられたときに、ある文字列がその文法により生成される言語に属するかどうか判定するにはどうしたらよいか？

$$
\begin{aligned}
S &\rightarrow aA, \\
A &\rightarrow \epsilon | bS
\end{aligned}
$$

上の正規文法は $\{a\}\{ba\}^*$ という言語を生成する。次のような機械を考える。



- 次のような状態を持つ

  各非終端記号 B ごとに状態 Ⓑ (B から生成される記号列を待っている状態）がある
- $B \rightarrow \epsilon$ なる規則があれば Ⓑ が最終状態
- 記号が入力されるごとに状態遷移を行う.

  $S \rightarrow aA$ なので，状態 Ⓢ からは記号 a を受け付け， Ⓐ に遷移

- もし $B \to b$ という形の規則があるならば、最終状態 $\#$ を新たに作り、状態 B からは記号 b を受け付け, $\#$ に遷移
- 文法の開始記号に対応する状態をオートマトンの出発状態にする

記号列をすべて読み終ったときに最終状態のうちどれかの状態になっていれば記号列は言語の要素

オートマトンの書き方と動作例

- 最終状態は二重丸で書く (教科書は四角で書いている)
- 出発状態には矢印を引く (これを書かない答案は不正解なので注意)

$$S \Rightarrow aA \Rightarrow abS \Rightarrow abaA \Rightarrow aba$$

なので aba は前 OHP の言語に含まれる。aba を入力したときのオートマトンの動作は…

決定性有限オートマトンの形式的な定義

状態の数が有限個で、各状態から同じラベルを持つ矢印が多くても１本しかないオートマトンを決定性有限オートマトンと呼び、以下の５つ組で定義される

$$M = (K, T, t, q_0, F)$$

K: 状態の集合
T: 入力記号の集合 (入力アルファベット)
t: 遷移関数, $K \times T$ を K に写す写像である。
q_0: 出発状態
F: 最終状態の集合

例：前 OHP のオートマトンは

$$\begin{aligned} M &= (\{S, A\}, \{a, b\}, t, S, \{A\}), \\ t(S, a) &= A, \\ t(A, b) &= S \end{aligned}$$

決定性有限オートマトンの遷移関数には、通常、値が定義されていない引数の組がある。上の例では $t(S, b)$ の値は未定義

表を使った遷移関数の書き方

$$
\begin{aligned}
M &= (\{S, A\}, \{a, b\}, t, S, \{A\}), \\
t(S, a) &= A, \\
t(A, b) &= S
\end{aligned}
$$

という遷移関数を

状態	入力	次の状態
K	T	K
S	a	A
A	b	S

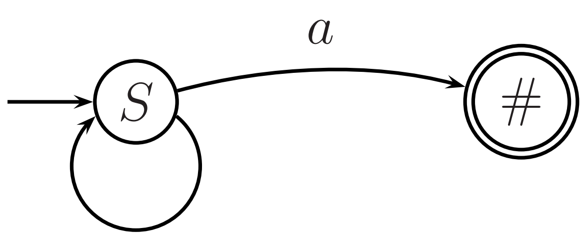
で書くこともある

非決定性有限オートマトンの例

以下のような言語

$$S \to a|aS$$

を受理するオートマトンを先程述べた方法で作ると



ラベル a をもつ矢印が状態 S から 2 本出る。

同じラベルを持つ矢印が 2 本以上出ている状態があるオートマトンを非決定性オートマトンと呼ぶ

ある記号列が非決定性オートマトンにより受理されるとは、記号列による遷移を適当に選ぶことにより最終状態に到達できることをいう

動作例: $S \Rightarrow aS \Rightarrow aa$ なので aa は上記文法から生成される。aa を上記オートマトンに入力すると…

非決定性有限オートマトンの形式的な定義

非決定性有限オートマトンは、以下の5つ組で定義される

$$M = (K, T, t, q_0, F)$$

K: 状態の集合
T: 入力記号の集合 (入力アルファベット)
t: 遷移関数, $K \times T$ を 2^K に写す写像である。
q_0: 出発状態
F: 最終状態の集合

例：前 OHP のオートマトンは

$$\begin{aligned} M &= (\{S, \#\}, \{a\}, t, S, \{\#\}), \\ t(S, a) &= \{S, \#\}, \\ t(\#, a) &= \emptyset \end{aligned}$$

非決定性有限オートマトンの遷移関数では、矢印が出ていない状態における遷移関数の値を空集合 $\emptyset$ にすることが多い。

決定性オートマトンは非決定性オートマトンである

表を使った遷移関数の書き方 (非決定性)

$$
\begin{aligned}
M &= (\{S, \#\}, \{a\}, t, S, \{\#\}), \\
t(S, a) &= \{S, \#\}, \\
t(\#, a) &= \emptyset
\end{aligned}
$$

という遷移関数を

K	T	2^K
S	a	$\{S, \#\}$
$\#$	a	$\emptyset$

で書くこともある

記号の定義

$M = (K, T, t, q_0, F)$: 有限オートマトン
$T(M)$: M に入力しおわったときに M の状態が最終状態の一つになる T 上の記号列

$L = T(M)$ であるとき「オートマトン M が言語 L を受理する」と言う

演習問題

答案に学籍番号、名前、ふりがなを書いて下さい。
次回からルーズリーフおよび A4 以外の大きさの紙の答案を減点します
わからないことが有れば、他の学生と相談するか、TA・教員に質問して下さい。

昨年度良くあった間違い

- 自分で言語を作る問題で、言語が何か書いていない。そのような答案は正しいのか間違っているのか判断できません。
- 言語を明示する問題は「文法 G で生成される言語」と書くのではなく、言語がどのような集合か明示して下さい
- 文法の定義で 4 つ組 (N, T, P, S) を書いていない。特に開始記号が何だか書いていないと、どのような言語が生成されるのかまったくわかりません。
- オートマトンの最終状態の集合を明示せず、F とだけ書いている人がいました
- 最終状態の集合が 1 つの状態からなるときに、集合の中括弧 $\{\}$ で括っていない
- 集合を表す中括弧 $\{\}$ と、組を表す丸括弧 $()$ をごっちゃにしている
- ルーズリーフまたは A4 以外の紙で提出している

演習問題 16 決定性オートマトンによって受理される言語 L_{16} を書き、L_{16} を生成する正規文法を書き、L_{16} を受理する決定性有限オートマトンをグラフおよび $M = (K, T, t, q_0, F)$ の両方の形式で書け。但し言語 L_{16} は今日の授業で例示した言語と本質的に違う言語にすること。

演習問題 17 非決定性オートマトンによって受理される言語 L_{17} を書き、L_{17} を生成する正規文法を書き、L_{17} を受理する**決定性ではない非決定性**有限オートマトンをグラフおよび $M = (K, T, t, q_0, F)$ の両方の形式で書け。但し言語 L_{17} は今日の授業で例示した言語と本質的に違う言語にすること。

演習問題 18 以下の正規文法 G で生成される言語 $L(G)$ を受理するオートマトンをグラフおよび $M = (K, T, t, q_0, F)$ の両方の形式で書け。

$G = (\{S, A\}, \{0, 1\}, P, S)$,

$$P = \{S \to \epsilon | 1S | 0A, \quad A \to 0S | 1\}$$

演習問題 19 前回演習で間違いが有った場合、×にされた理由がわかったかどうか／納得できたかどうか書いて下さい。今日の授業でわかりにくい所や要望を書いて下さい