数理ファイナンス
期末試験

2006 年 2 月 13 日
中川　秀敏 (NAKAGAWA Hidetoshi)
西 9 号館　期棟 105 号室
E-mail:nakagawa.h.ab@m.titech.ac.jp
URL:http://www.craft.titech.ac.jp/~nakagawa/index.html

注意事項

- 試験時間は 10:50 – 12:10（80 分）
- この問題用紙１部と解答用紙２枚、計算用紙（白紙）１枚が配布されていることを確認すること。
- 解答用紙には忘れずに学生番号と氏名を書くこと。**解答は２枚綴りの解答用紙の表面のみに記入せよ**。必要が生じた場合は裏面を使用してもよいが、できるだけ避けること。
- 問題用紙および計算用紙は回収しない。
- 試験中に本人確認を行うので、学生証を机の上に提示すること。
- 試験中に机に置ける私物は、筆記用具、学生証、時計のみ。携帯電話を時計の代用品として用いることは許可するが、時計以外の目的で使用しないことがわかるようにすること。
- 不正行為等への対応は、すべて通常の試験と同様に行う。

試験自体は 120 点満点とするが、成績をつける際には $\min\{100, \text{実際の得点}\}$ として処理する。

問題 1（30 点）

２期間二項モデルの設定で、$S_0 = 24, S_1(H) = 48, S_1(T) = 12$ という株価過程があるとする。また（無リスク）金利を $r = 0.5$ とする。（**結果だけを解答せよ**）

(1) 上昇率 u と下落率 d が時点によらず一定であるとするとき、$S_2(HH), S_2(HT), S_2(TH), S_2(TT)$ の値をそれぞれ求めよ。（6 点）

(2) 時刻 2 を満期、行使価格を 69 とするヨーロピアン・コール・オプションの時点 0 での価格を求めよ。（6 点）

(3) 時刻 2 を満期、行使価格を 69 とするヨーロピアン・プット・オプションの時点 0 での価格を求めよ。（6 点）

(4) 時刻 2 を満期、行使価格を 51 とするアメリカン・コール・オプションの時点 0 での価格を求めよ。（6 点）

(5) 時刻 2 を満期、行使価格を 51 とするアメリカン・プット・オプションの時点 0 での価格を求めよ。（6 点）

問題 2（30 点）

３期間二項モデルの設定で、$S_0 = 4, u = 2, d = \frac{1}{2}, r = \frac{1}{4}$ とする。時刻 3 を満期とし、本源的価値が $(4-s)^+$ であるアメリカン・プット・オプションを考える。

(1) 時刻 0 におけるアメリカン・プット・オプションの価格 V_0^P を求めよ。（10 点）

(2) このアメリカン・プット・オプションの価格 V_0^P をアメリカン・リスク中立価格評価式で以下のように表すとき、$(*)$ 部分に入る数式を、S, r および τ を用いて書け。

$$V_0^P = \max_{\tau \in \mathcal{S}_0} \tilde{E}\Big[\qquad (*) \qquad \Big]$$

ただし、$\tilde{E}[\cdots]$ はリスク中立確率測度 $\tilde{P}$ の下で期待値を表し、$\mathcal{S}_0$ を $\{0, 1, 2, 3, \infty\}$ に値をとる停止時刻（stopping time）全体の集合とする。（10 点）

(3) このアメリカン・オプションに対する最適行使時刻を $\tau^*(\in \mathcal{S}_0)$ とおく。

$$\tau^*(HHH), \tau^*(HHT), \tau^*(HTH), \tau^*(HTT), \tau^*(THH), \tau^*(THT), \tau^*(TTH), \tau^*(TTT)$$

をそれぞれ求めよ。（10 点）

問題 3（30 点）

次の各問いに答えよ

(1) 実確率測度を P、リスク中立確率測度を $\tilde{P}$ とする N 期間二項モデルにおいて、P に関する $\tilde{P}$ のラドンーニコディム微分を Z とおく。また金利を r とする。このとき、状態価格（state price）の定義を与え、それは具体的にどのような意味をもつかを、派生証券のリスク中立価格評価式を用いて説明せよ。（10 点）

(2) $\{G_n\}$ を本源価値過程とするアメリカンデリバティブ価格評価アルゴリズム：

$$V_N(\omega_1 \cdots \omega_N) := \max\{G_N(\omega_1 \cdots \omega_N), 0\}$$
$$V_n(\omega_1 \cdots \omega_n) := \max\left\{G_n(\omega_1 \cdots \omega_n), \frac{1}{1+r}\tilde{E}_n[V_{n+1}](\omega_1 \cdots \omega_n)\right\} \quad n \leq N-1$$

で定義される確率過程 $\{V_n\}$ について、以下の 2 つのことをそれぞれ証明せよ。（10 点）

任意の時点 n において $V_n \geq \max\{G_n, 0\}$ を満たす。

割引価格過程 $\left\{\dfrac{V_n}{(1+r)^n}\right\}$ がリスク中立確率 $\tilde{P}$ の下で優マルチンゲールになる。

(3) 時点 0 における株価が S_0 で、ボラティリティ（瞬間的な収益率の標準偏差）を σ とする株式の上に書かれた、T を満期、K を行使価格とするヨーロピアン・コール・オプションの時点 0 での価格は、Black-Scholes 式により、

$$V_0 = S_0\Phi(d_1) - Ke^{-rT}\Phi(d_2), \quad d_1 := \frac{\log\frac{S_0}{K} + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}},\ d_2 := d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

で与えられる。ただし、r は（連続複利の意味での）無リスク金利、$\Phi(x)$ は標準正規分布関数とする。（10 点）

他の設定は変わらないとして、ボラティリティ σ が大きくなると、コールオプションの価格 V_0 はどのように変化するか？一般にベガと呼ばれる偏微分係数 $\dfrac{\partial V_0}{\partial \sigma}$ を計算することで答えよ。

問題 4（30 点）

コインを繰り返し投げる。毎回のコイン投げで表が出る確率も裏が出る確率もともに $\dfrac{1}{2}$ とする。k 回目のコイントスの結果が表であれば $X_k = 1$、裏であれば $X_k = -1$ とする。このとき、$M_0 = 0$ および次で定義される確率過程 $M_0, M_1, M_2, \cdots$ を考える。

$$M_n = \sum_{k=1}^{n} X_k, \qquad n = 1, 2, \cdots$$

（これは表が出ると 1 歩前に進み、裏が出ると 1 歩後ろに戻ると解釈し、対称ランダムウォークとも呼ばれる）

(1) $M_0, M_1, M_2, \cdots$ がマルチンゲールであることを示せ。（10 点）

(2) $I_0 = 0$ および $I_1, I_2, \cdots$ を

$$I_n = \sum_{k=0}^{n-1} M_k(M_{k+1} - M_k), \qquad k = 1, 2, \cdots$$

で定義する。このとき、$I_n = \dfrac{1}{2}M_n^2 - \dfrac{n}{2}$ が成り立つことを示せ。（10 点）

(3) $I_0, I_1, I_2, \cdots$ はマルコフ過程であることを示せ。（10 点）