数理ファイナンス期末試験

略解

問題 1

（サブテキスト 132-140 ページを参照）

(1) $S_2(HH) = 96,\ S_2(HT) = S_2(TH) = 24,\ S_2(TT) = 6$

(2) $C_0^E = \dfrac{16}{3} = 5.33\cdots$

(3) $P_0^E = 12$

(4) $C_0^A = \dfrac{80}{9} = 8.88\cdots$ （ヨーロピアン・コール・オプションだと思って考えればよい）

(5) $P_0^A = 27$（サブテキストの解答は間違っている）

問題 2

（メインテキスト 4.8 節の練習問題 1 (i) および 4.4 節の内容）

(1) $V_0^P = \dfrac{116}{125} = 0.928$

(2) $1_{\{\tau \le 3\}} \dfrac{(4 - S_\tau)^+}{(1+r)^\tau}$

(3)

$$\tau^*(HHH) = \tau^*(HHT) = \tau^*(HTH) = \infty,\ \tau^*(HTT) = 3,$$
$$\tau^*(THH) = \tau^*(THT) = \tau^*(TTH) = \tau^*(TTT) = 1$$

問題 3

(1) （メインテキスト定義 3.1.3 とその後の説明を参照）
$\zeta(\omega) := \dfrac{Z(\omega)}{(1+r)^N}$ とおくとき、$\zeta(\omega)P(\omega)$ を ω に対する状態価格と呼ぶ。
$V_N(\omega)$ を、ある特定の $\bar{\omega}$ に対して $\omega = \bar{\omega}$ のとき 1 を、それ以外の時には 0 を支払う派生証券とすると、リスク中立価格評価式から

$$\tilde{E}\Big[\frac{V_N}{(1+r)^N}\Big] = \frac{\tilde{P}(\bar{\omega})}{(1+r)^N} = \frac{Z(\bar{\omega})P(\bar{\omega})}{(1+r)^N} = \zeta(\bar{\omega})P(\bar{\omega})$$

となることがわかるので、状態価格 $\zeta(\bar{\omega})P(\bar{\omega})$ は時刻 N において $\bar{\omega}$ が起こったときかつそのときのみ 1 支払われる派生証券の、時刻 0 での価格を意味していることがわかる。

(2) （メインテキスト定理 4.4.3 の証明の最初の部分を参照）
逆向き帰納法による。$n = N$ のときは明らか。$n = k+1$ のときに成り立つと仮定して、

$n=k$ のときに成り立つことを示せば良い。

の不等式が成り立つことから、$V_n \geq \dfrac{1}{1+r}\tilde{E}_n[V_{n+1}]$ が言えるので、両辺 $(1+r)^n$ で割れば優マルチンゲール性がすぐにわかる。

(3) （サブテキスト 179-180 ページを参照）
ベガを計算すると

$$\frac{\partial V_0}{\partial \sigma} = S_0\sqrt{T}\phi(d_1)$$

となる（$\phi(\cdot)$ は標準正規密度関数）。この値は常に正となる。したがって、σ が大きくなると、V_0 は大きくなる。

問題 4

（メインテキスト 2.8 節の練習問題４と５）

(1) 説明は省くが、$E_n[M_{n+1}] = E_n[M_n + X_{n+1}] = M_n + E_n[X_{n+1}] = M_n + E[X_{n+1}] = M_n$ という流れで示すことができる。

(2) 数学的帰納法で証明することができる。あるいは、以下のように直接変形で示すこともできる。

$$\begin{aligned}
I_n &= M_0(M_1 - M_0) + M_1(M_2 - M_1) + \cdots + M_{n-1}(M_n - M_{n-1}) \\
&= M_0X_1 + M_1X_2 + \cdots + M_{n-1}X_n \\
&= 0 \cdot X_1 + X_1X_2 + \cdots + (X_1 + \cdots + X_{n-1})X_n \\
&= \sum_{1\leq i<j\leq n} X_iX_j
\end{aligned}$$

に注意すると、

$$\begin{aligned}
M_n^2 &= (X_1 + \cdots + X_n)^2 \\
&= (X_1^2 + \cdots X_n^2) + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} X_iX_j \\
&= n^2 + 2I_n
\end{aligned}$$

(3) 任意の n および任意の関数 $f(\cdot)$ に対して、ある（n および f に依存してもよい）関数 $g(\cdot)$ が存在して

$$E_n[f(I_{n+1})] = g(I_n)$$

と表されることを示せばよい。具体的に関数 g を構成する。(2) より $M_n^2 = 2I_n + n$ であることと、X_{n+1} の結果は時刻 n までの情報には依存しないことに注意する。$I_n = i$ とおくと、

$$\begin{aligned}
E_n[f(I_{n+1})] &= E_n[f(i + M_nX_{n+1})] \\
&= \frac{1}{2}\{f(i+\sqrt{2i+n}) + f(i-\sqrt{2i+n})\}
\end{aligned}$$

と表すことができるので、$g(i) := \dfrac{1}{2}\{f(i+\sqrt{2i+n}) + f(i-\sqrt{2i+n})\}$ とおけばよい。