数理ファイナンス
中間試験

2006 年 12 月 5 日
中川　秀敏 (NAKAGAWA Hidetoshi)
西 9 号館　期棟 105 号室
E-mail:nakagawa.h.ab@m.titech.ac.jp
URL:http://www.craft.titech.ac.jp/~nakagawa/index.html

注意事項

- 試験時間は 10:50 – 12:00（70 分）
- この問題用紙１部と解答用紙１枚、計算用紙（白紙）１枚が配布されていることを確認すること。
- 解答用紙には忘れずに学生番号と氏名を書くこと。解答は解答用紙の表面に記入せよ。ただし、必要が生じた場合は裏面を使用してもよい。問題用紙および計算用紙は回収しない。
- 試験中に本人確認を行うので、学生証を机の上に提示すること。
- 試験中に机に置ける私物は、筆記用具、学生証、時計のみ。携帯電話を時計の代用品として用いることは許可するが、時計以外の目的で使用しないことがわかるようにすること。
- 不正行為等への対応は、すべて通常の試験と同様に行う。

問題 1（20 点）

１期間二項モデルの設定で、$S_0 = 100, S_1(H) = 130, S_1(T) = 90$ とする。また（無リスク）金利を r とする。（結果だけを解答せよ）

(1) このモデルが無裁定であるために r が満たすべき必要十分条件を答えよ。（7 点）

(2) $r = 0.2$ のとき、コール・オプション $V_1 = (S_1 - 100)^+$ の時点 0 での価格を求めよ。（7 点）

(3) (2) の設定において、このコールオプションの複製戦略（株式の保有単位数） Δ_0 を求めよ。（6 点）

問題 2（30 点）

３期間二項モデルの設定で、$S_0 = 4, u = 2, d = \frac{1}{2}, r = \frac{1}{4}$ とする。ルックバック・オプション $V_3 = (S_3 - \min_{0 \le n \le 3} S_n)^+$ の時点 0 での価格 V_0 を求めたい。（結果だけを解答せよ）

(1) $m_n = \min_{0 \le k \le n} S_k$ とおくとき、(S_3, m_3) の値の組合せとして考えられるものを全て答えよ。（7 点）

(2) 時点 n に $S_n = s, m_n = m$ であるときのこのオプション価値を $v_n(s, m)$ と書くことにする。$v_2(s, m)$ を記号 v_3, s, m を用いて、できるだけ整理した式で表せ。必要であれば、$a \wedge b := \min\{a, b\}$ という意味の記号 $\wedge$ を用いてもよい。（8 点）

(3) $v_2(4, 2)$ の値を求めよ。（7 点）

(4) $v_0(4, 4)$ の値を求めよ。（8 点）

問題 3（15 点）

N 期間二項モデルを仮定する。有限確率空間を (Ω, P) とする。

(1) 確率変数の列 $M_0, M_1, \cdots, M_N$ が確率測度 P の下でマルチンゲールであるとはどういうことか、その定義を書け。（5 点）

(2) 正の値をとる確率変数の列 $Y_0, Y_1, \cdots, Y_N$ が確率測度 P の下でマルチンゲールであるとする。このとき $\log(Y_0), \log(Y_1), \cdots, \log(Y_N)$ は、P の下でマルチンゲール、劣マルチンゲール、優マルチンゲールのどれになるか、あるいはこの３つのいずれにもあてはまらないか？　理由（証明あるいは例）付きで答えよ。（5 点）

(3) 正の値をとる確率変数の列 $Z_1, \cdots, Z_N$ がある。各 $n = 1, \cdots, N$ に対して、Z_n は n 回目のコイントスの結果だけに依存して値が決まるものとする（要するに $Z_1, \cdots, Z_N$ は独立な確率変数）。

このとき、$W_0 := 3$ および $n = 1, \cdots, N$ に対して $W_n := 2^{-n} Z_1 \cdots Z_n$ （すなわち Z_1 から Z_n までの積を 2^n で割ったもの）と定義する。

確率測度 P の下で $W_0, W_1, \cdots, W_N$ がマルチンゲールとなるための必要十分条件が『$E[Z_1] = a$ かつ、$n = 2, \cdots, N$ に対して $E[Z_n] = b$ が成り立つ』ことと表されるとき、a, b の値を求めよ。（5 点）

問題 4（35 点）

N 期間二項モデルにおいて無配当株式を考える。$K > 0$ とする。時点 N でペイオフ $C_N = (S_N - K)^+$ をもつヨーロピアン・コール・オプションの時点 n における価格を C_n、時点 N でペイオフ $P_N = (K - S_N)^+$ をもつヨーロピアン・プット・オプションの時点 n における価格を P_n とする。

また、時点 N において株式 1 単位を K で購入するフォワード契約、すなわち、時点 N でのペイオフが $F_N = S_N - K$ で与えられるデリバティブを考える。このフォワード契約の時点 n での価格を F_n とする。

リスク中立価格評価式によると、それぞれのデリバティブの時点 n における価格は

$$C_n = \tilde{E}_n\Big[\frac{C_N}{(1+r)^{N-n}}\Big],\ P_n = \tilde{E}_n\Big[\frac{P_N}{(1+r)^{N-n}}\Big],\ F_n = \tilde{E}_n\Big[\frac{F_N}{(1+r)^{N-n}}\Big]$$

で与えられる。（$\tilde{E}_n[\cdot]$ は、時点 n までの情報に基づくリスク中立確率 $\tilde{P}$ の下での条件付き期待値を表している）

(1) $C_N = P_N + F_N$ が成り立つことを示せ。（7 点）

(2) C_n, P_n, F_n に対するリスク中立価格評価式を利用して、$n = 0, 1, \cdots, N-1$ に対して、$C_n = P_n + F_n$ が成り立つことを示せ。（7 点）

(3) $F_0 = S_0 - \dfrac{K}{(1+r)^N}$ が成り立つことを示せ。（7 点）

(4) 時点 0 で F_0 だけ資産を保有するとする。必要ならばマネー・マーケットから資金を借りることで、時点 0 において株式 1 単位を購入するポートフォリオを組み、それ以降は時点 N まで何も取引をしないとする。このとき、時点 N における株式 1 単位保有のポートフォリオの価値は F_N となることを示せ。（7 点）

(5) $K = (1+r)^N S_0$ とおくとき、$C_0 = P_0$ が成り立つことを示せ。また、$n = 1, 2, \cdots, N$ に対しても $C_n = P_n$ が成り立つか？　理由もつけて答えよ。（7 点）