数理ファイナンス中間試験

解説・解答例・採点コメント

解説の作成は、TA の林さん（経営工学専攻修士１年）に協力してもらいました。

問題 1

(1) u を上昇率、d を下落率 $(0 < d < u)$ とすると、無裁定であるために r が満たす必要十分条件は、$(0 <)d < 1 + r < u$ である。

$$u = \frac{S_1(H)}{S_0} = 1.3,\ d = \frac{S_1(T)}{S_0} = 0.9$$

であるので、

$$0.9 < 1 + r < 1.3 \iff \underline{-0.1 < r < 0.3}$$

(2) 上昇した場合 $V_1(H)$ と下落した場合 $V_1(T)$ のコール・オプションのペイオフはそれぞれ、

$$V_1(H) = (S_1(H) - 100)^+ = (130 - 100)^+ = 30,\ V_1(T) = (S_1(T) - 100)^+ = (90 - 100)^+ = 0.$$

$r = 0.2, u = 1.3, d = 0.9$ であるので、リスク中立確率 $\tilde{p}, \tilde{q}$ は、

$$\tilde{p} = \frac{1 + r - d}{u - d} = \frac{3}{4},\ \tilde{q} = \frac{u - 1 - r}{u - d} = \frac{1}{4}.$$

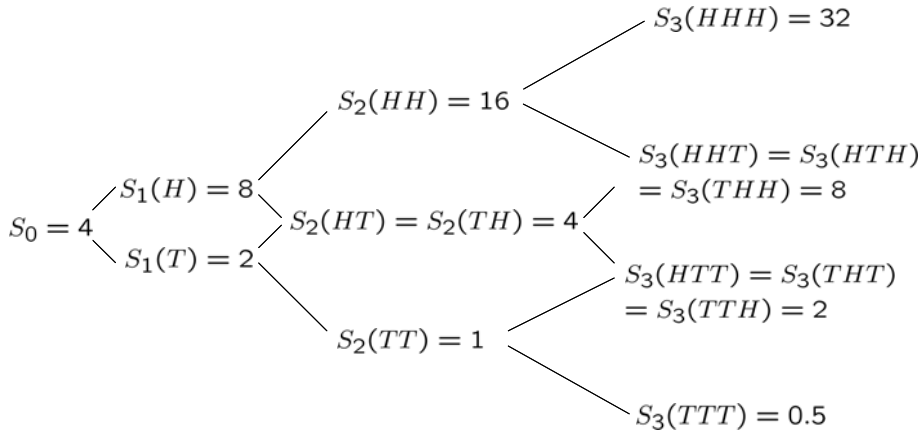
よって、時点 0 でのコール・オプションの価格 V_0 は以下のようになる。

$$V_0 = \frac{1}{1 + r}[\tilde{p}V_1(H) + \tilde{q}V_1(T)] = \underline{\frac{75}{4} = 18.75}$$

(3) デルタ・ヘッジ式より、

$$\Delta_0 = \frac{V_1(H) - V_1(T)}{S_1(H) - S_1(T)} = \underline{\frac{3}{4} = 0.75.}$$

問題 2



(1) (S_3, m_3) の組み合わせは以下の 6 個。

$$\underline{(32,4),(8,4),(8,2),(2,2),(2,1),(0.5,0.5)}$$

(2) 時点 $n+1$ でのオプションの価値は、上昇時 $v_{n+1}(2s,m)$ 下落時 $v_{n+1}(\frac{1}{2}s, \frac{1}{2}s \wedge m)$ と表すことができる。リスク中立確率は、$\tilde{p} = 0.5, \tilde{q} = 0.5$ より、$v_2(s,m)$ は以下のようになる。

$$\underline{v_2(s,m) = \frac{2}{5}\Big[v_3(2s,m) + v_3(\tfrac{1}{2}s, \tfrac{1}{2}s \wedge m)\Big]}$$

(3) $v_3(s,m)$ での各オプションの値は、

$$v_3(32,4) = 28, v_3(8,4) = 4, v_3(8,2) = 6, v_3(2,2) = 0, v_3(2,1) = 1, v_3(0.5,0.5) = 0.$$

(2) で求めた式を用いると、

$$v_2(4,2) = \frac{2}{5}\Big[v_3(8,2) + v_3(2,2)\Big] = \underline{\frac{12}{5} = 2.4.}$$

(4) (3) と同様に、他の v_2 の値を計算すると、

$$v_2(16,4) = \frac{2}{5}\Big[v_3(32,4) + v_3(8,4)\Big] = \frac{64}{5},$$

$$v_2(4,4) = \frac{2}{5}\Big[v_3(8,4) + v_3(2,2)\Big] = \frac{8}{5},$$

$$v_2(1,1) = \frac{2}{5}\Big[v_3(2,1) + v_3(0.5,0.5)\Big] = \frac{2}{5}$$

となり、

$$v_1(8,4) = \frac{2}{5}\Big[v_2(16,4) + v_2(4,4)\Big] = \frac{144}{25},$$

$$v_1(2,2) = \frac{2}{5}\Big[v_2(4,2) + v_2(1,1)\Big] = \frac{28}{25}$$

と計算できる。よって、時刻 0 のオプションの値は、

$$v_0(4,4) = \frac{2}{5}\Big[v_1(8,4) + v_1(2,2)\Big] = \underline{\frac{344}{125} = 2.752.}$$

問題 3

(1) 確率変数列 $(M_i)_{i\in\{0,\cdots,N\}}$ が確率測度 P の下でマルチンゲールであることの定義は、$(M_i)_{i\in\{0,\cdots,N\}}$ が適合過程 (adapted process) であり、かつ $\forall n \in \{0,\cdots,N-1\}$ に対して $M_n = E_n[M_{n+1}]$ を満たすことである。

(2) $-\log(\cdot)$ は凸関数であるから、Jensen の不等式を適用できる。Jensen の不等式と (Y_n) のマルチンゲール性より、以下の不等式を得る。

$$E_n[-\log(Y_{n+1})] \geq -\log(E_n[Y_{n+1}]) = -\log(Y_n), \quad \forall n \in \{0,\cdots,N-1\}$$

両辺、-1 倍して

$$E_n[\log(Y_{n+1})] \leq \log(Y_n), \quad \forall n \in \{0, \cdots, N-1\}$$

となる。適合過程であることは明らかなので、上の不等号の関係から、$(\log(Y_n))$ は <u>優マルチンゲール</u> であることがわかる。

(3) $n=0$ のとき、$W_0 = E[W_1] = E[\frac{Z_1}{2}]$ であることが必要十分であることから、$E[Z_1] = 2W_0 = 6$
すなわち $\underline{a=6}$
また、$n \geq 1$ のときは条件付期待値の "taking out what is known" の性質と独立性を用いて、

$$E_n[W_{n+1}] = E_n[W_n \frac{Z_{n+1}}{2}] = W_n E_n[\frac{Z_{n+1}}{2}] = W_n E[\frac{Z_{n+1}}{2}]$$

であるので、マルチンゲールであるための必要十分条件としては

$$W_n E[\frac{Z_{n+1}}{2}] = W_n \iff E[Z_{n+1}] = 2$$

すなわち、$\underline{b=2}$ を得る。

問題 4

(1) (i) $K - S_N \geq 0$ のとき
左辺 $= \max(S_N - K, 0) = 0,$
右辺 $= \max(K - S_N, 0) + S_N - K = 0.$
(ii) $S_N - K \geq 0$ のとき
左辺 $= \max(S_N - K, 0) = S_N - K,$
右辺 $= \max(K - S_N, 0) + S_N - K = S_N - K.$
よって、$C_N = P_N + F_N$ である。

(2) (1) の結果と条件付き期待値の線形性を利用すればよい。

$$\begin{aligned} C_n &= \tilde{E}_n \left[\frac{C_N}{(1+r)^N} \right] \\ &= \tilde{E}_n \left[\frac{P_N + F_N}{(1+r)^N} \right] \\ &= \tilde{E}_n \left[\frac{P_N}{(1+r)^N} \right] + \tilde{E}_n \left[\frac{F_N}{(1+r)^N} \right] \text{（線形性）} \\ &= P_n + F_n \end{aligned}$$

(3) (2) の結果と、リスク中立確率測度の元で割引株価がマルチンゲールであることを使うと示すことができる。(2) の結果において $n=0$ とした式を変形していく。

$$
\begin{aligned}
F_0 = C_0 - P_0 &= \tilde{E}\left[\frac{C_N - P_N}{(1+r)^N}\right] \\
&= \tilde{E}\left[\frac{(S_N - K)^+ - (K - S_N)^+}{(1+r)^N}\right] \\
&= \tilde{E}\left[\frac{S_N - K}{(1+r)^N}\right] \\
&= \tilde{E}\left[\frac{S_N}{(1+r)^N}\right] - \frac{K}{(1+r)^N} \\
&= \frac{S_0}{(1+r)^0} - \frac{K}{(1+r)^N} \\
&= S_0 - \frac{K}{(1+r)^N}
\end{aligned}
$$

よって示された。(4 行目から 5 行目の変形で割引株価がリスク中立確率下でマルチンゲールであるという性質を用いた。)

(4) (3) の結果より、時刻 0 で F_0 の資産を保有していて、かつ時刻 0 で株式を 1 単位購入して組んだポートフォリオは $F_0 - S_0 = -\frac{K}{(1+r)^N}$ の現金（すわなち、マネーマーケットから $\frac{K}{(1+r)^N}$ の借入をすることになる）と、1 単位の株式からなるポートフォリオとなる。従ってこのまま時刻 N まで何もせずにいると、株式の価格は S_N、現金はリスクフリーレート r で運用され $-K$ となる。よって、このポートフォリオの時刻 N での価値は $S_N - K$ となる。ここで $F_N = S_N - K$ であるので、時刻 N でのポートフォリオの価値 $= F_N$ となる。

(5) まず、(2) の等式において $n = 0$ とすると、

$$
\begin{aligned}
C_0 &= P_0 + F_0 \\
&= P_0 + S_0 - \frac{K}{(1+r)^N} \\
&= P_0 + S_0 - \frac{(1+r)^N S_0}{(1+r)^N} \\
&= P_0.
\end{aligned}
$$

次に時刻 $n = 1, \cdots, N$ のときを考えると、$\tilde{P}$ の下で $\left(\frac{S_n}{(1+r)^n}\right)$ がマルチンゲールになること、および S_n は 2 項確率変数であり一定の値をとらないことから、

$$
\begin{aligned}
F_n = \tilde{E}_n\left[\frac{F_N}{(1+r)^N}\right] &= E_n\left[\frac{S_N - (1+r)^N S_0}{(1+r)^N}\right] \\
&= \tilde{E}_n\left[\frac{S_N}{(1+r)^N}\right] - S_0 \\
&= \frac{S_n}{(1+r)^n} - S_0 \neq 0
\end{aligned}
$$

したがって、一般には $n = 1, \cdots, N$ のとき $F_n \neq 0$ であるので、(2) より $C_n = P_n + F_n \neq P_n$ となる。

採点基準

問題 1

(1)(2)(3) ともに基本的に答えが正しくないと×です。ただし、答えに同情の余地があるものについては程度によって点数を与えています。

問題 2

(1) 余計なものや不足のものがあれば一つにつき、-2 点。８通りの表を書いた人は問題の要求に正しく答えていないということで -1 点。

(2) $v_3(2s, 2s \wedge m)$ と表現している人がいましたが、$2s\wedge$ は不要なので、-1 点。その他、数字で表されるところを記号のままにしてあったり、式を簡潔な表現にするのが不十分だったりする場合は、程度に応じて減点しました。

(3)(4) ともに基本的に答えが正しくないと×です。ただし、答えに同情の余地があるものについては程度によって点数を与えています。

問題 3

(1) 「任意の $n = 0, 1, \cdots, N-1$ に対して、$E_n[M_{n+1}] = M_n$ が成り立つこと」と「適合過程であること」両方にふれている必要があります。片方だけ（といっても前者だけのケースだけですが）の場合は３点です。$E_n[M_{n+1}]$ の $_n$ が無い人は 0 点です。「任意の $n = 0, 1, \cdots, N-1$」が無かったり、添え字のとる値の範囲がずれているようなものはオマケしました。

(2) 「log が凹関数であること」から「-log が凸関数であること」に気づいて、「Jensen の不等式」を用いて「優マルチンゲール」を示してパーフェクトです。「凹関数の場合に Jensen の不等式が逆向きで成り立つ」というのは正しい事実ですが、テキストではそのことを明示していないので、そのことについては証明なり最低限の説明が必要と考えます。詳しい説明が無い場合に、「Jensen の不等式」という言葉があれば -1 点、「Jensen の不等式」に言及していないものは -2 点。その他「優マルチンゲール」という結論があっていれば、議論が全くおかしいものでも最低 1 点は与えています。逆に、その他の解答をしたものでも解答の過程に同情の余地があれば部分点を与えています。

(3) きちんと必要性と十分性を論じてくれた人もいましたが、ポイントを押さえればあまり細かく議論する必要はないと思っていたので、基本的に答えだけをチェックしています。a, b の値が片方だけあっている人は 3 点としました。

問題 4

(1) 場合わけをしていれば基本的に正解としています。

(2) 「（条件付き期待値の）線形性」ということ以外にこの問題のポイントはないので、「線形性」という言葉がないものは -2 点としました。

(3) 「$\dfrac{S_n}{(1+r)^n}$ が $\tilde{P}$ の下でマルチンゲール」ということがこの問題の最大のポイントなので、その趣旨の説明がないものは -5 点としました。

(4) 根拠がよく分からないものもありましたが、適当に部分点を与えています。

(5) $C_0 = P_0$ が適当な道筋で示されていれば多少説明不足でも 1 点です。$C_n \neq P_n$ の根拠がよく分からないものもありましたが、適当に部分点を与えています。