イノベーションマネジメント研究科
技術経営専攻

金融リスク・マネジメント

第4講：市場リスク（2）

東京工業大学イノベーションマネジメント研究科
中川　秀敏
E-mail: nakagawa@mot.titech.ac.jp
Office Hour : 13:00-14:30, every Tuesday, at W9-105

※講義資料は、講義前日の午後5時までにはアップするので事前に
http://www.craft.titech.ac.jp/~nakagawa/dir2/lecture.html#TIT2006_1
から各自でダウンロードして用意すること。

Agenda

- VaRの利点と問題点
- リスク指標の満たすべき性質
  - Coherence という性質
  - Conditional-VaR
- モデルの評価
  - バックテスト／ストレステスト
- ポートフォリオの市場リスク計測
  - リターンとリスクの関係
  - CAPM
- 復習：統計学の基礎
  - 共分散・相関係数
  - 散布図

VaRの利点と問題点

- VaRの利点
  - 共通の尺度であるため、比較や合算が可能
    →市場リスクと信用リスクの統合リスク管理指標へ
  - 確率と対応する金額で表示されるので理解しやすい
- VaRの問題点
  - (理論面) 劣加法性、凸性が必ずしも成り立たない
    →Conditinal VaR(C-VaR)の利用
  - (実務面) 過去の状況に依存したリスク量が算出されるので、市場が落ち着いているとリスクも低く算出されてしまう
    →バックテストのよるモデルの妥当性の確認やストレステストによる極端なシナリオ時のインパクトの把握

リスク指標の満たすべき性質

- Coherence (Artzner-Delbaen-Eber-Heath, 1999)

$(\bullet)$: **リスク尺度**

$, Y$: **損失額を表す確率変数**

$> 0,\ c \in \mathrm{R}$

ρ **が** $coherent$ **であるとは、次の4条件を満たすとき**

(1) $\rho(X+c) = \rho(X) + c$

2) $\rho(X+Y) \le \rho(X) + \rho(Y)$

3) $\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$

4) $X \le Y \Rightarrow \rho(X) \le \rho(Y)$

VaR**は**(2)**を満たすとは限らない**

- Convexity (Föllmer-Schied, 2002)

VaR**は**(5)**を満たすとは限らない**

(2), (3)**の代わりに**

(5) $\rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) \le \lambda \rho(X) + (1-\lambda)\rho(Y) \quad 0 \le \lambda \le 1$

C-VaR

- Conditional VaR(C-VaR)…Expected Shortfall などとも呼ぶ
  - 「VaR よりも大きな損失が出た場合」の平均損失額として定義する（条件付き期待値として計算される）
  - VaR≦CVaR が成り立ち、より保守的なリスク指標
  - 「劣加法性」も満たす
  - X を損失額（正値で大きいほど悪い）とし、α を信頼水準（99%とか）とすると、次のように表される

$$\begin{aligned} \text{C-VaR}_{\alpha}(X) &= E\left[X \mid X \geq \text{VaR}_{\alpha}(X)\right] \\ &= \frac{1}{1-\alpha}\int_{\alpha}^{1} \text{VaR}_{\lambda}(X)\,d\lambda \end{aligned}$$

モデルの評価

- バックテスト：モデルで計測したリスク量の妥当性を事後的に検証すること。方法や評価基準が統一されているわけではない。
- 超過回数による検証方法
  - VaRを超える損失が実際に発生した回数を数え、それを検定の枠組みで考える方法
  - 99%VaR ということは100回のうちVaRを超過する回数は1回というのが定義から最も納得できる結果だが・・・

モデルの評価

- 超過回数による検証方法（つづき）
  - N を検証した回数、k をそのうち99%VaRを超過する損失が発生した回数とする。k は2項分布に従うと仮定する。
  - 帰無仮説を「k の従う2項分布のパラメータは p=0.01」として、右片側検定を実施。（超過回数が少ない分は良しとする保守的な見方をしておく）
  - N = 100, p=0.01 のとき、2項分布の理論上の発生確率と累積確率（それ以下の確率の和）は表の通り

EXCEL関数:BINOMDIST

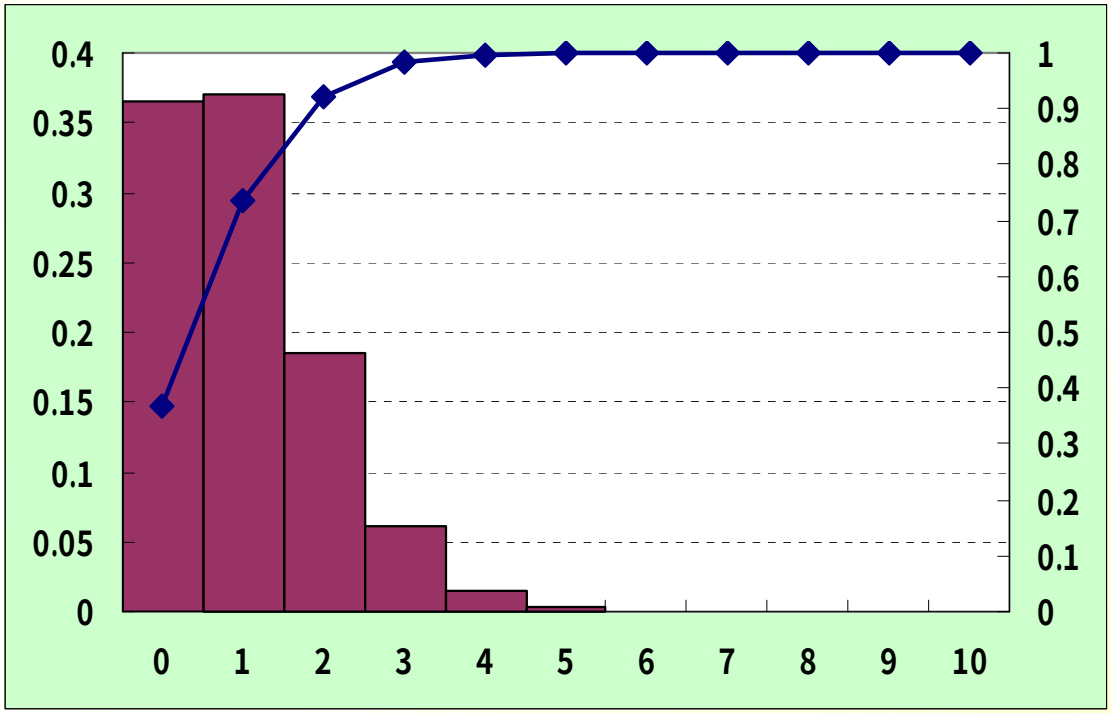
超過回数	確率	累積確率
0	36.60%	36.60%
1	36.97%	73.58%
2	18.49%	92.06%
3	6.10%	98.16%
4	1.49%	99.66%
5	0.29%	99.95%

※この場合、100日のうち3日以上VaRを超える確率は 7.94%, 4日以上VaRを超える確率は 1.84%, 5日以上VaRを超える確率は 0.34%なので、
5日以上VaRを超える日があれば、VaR水準としては低すぎたと考えられる

モデルの評価

- 超過回数による検証方法（つづき）

N=100, p=0.01の場合の二項分布のグラフ
棒グラフは横軸のイベント発生回数の発生確率を表し、折れ線グラフはその回数以下の発生確率を表す



極端な事象発生時の影響

- ストレステスト：「VaRでは把握することのできない例外的だが蓋然性のあるイベントが発生した場合に金融機関が被る潜在的な損失を検証する手法」（BISグローバル金融システム委員会報告書「主要金融機関におけるストレステスト：調査結果とその実務」（日本銀行解説））
  - 最近では、VaRの補完的な使途だけでなく様々な場面でストレステストが利用されている
- 想定するストレス・シナリオが発生したときにどの程度資産やポートフォリオが損失を被るかを算出
- ストレステストの際のシナリオに用いられる実例
  - 為替のプラザ合意（1985.9）
  - ブラックマンデー（1987.10）
  - アジア通貨危機（1997.8）

今回（と次回）の問題

- 東証33業種の業種別インデックスに分散投資するポートフォリオを構築する。
「リスクーリターンの関係」から考えて、各業種インデックスへの最適な投資比率を求めよ。

- 次回（5／23）の演習の際に、分析用ツールを援用して、実際の投資比率を考えてもらう。

ポートフォリオのリスク

- TOPIXの場合と同様に、各業種別インデックスの日次収益率を正規分布でモデル化
- ただし、各業種インデックス間の相関を考慮し、多次元正規分布でモデル化する
  - 期待リターンのベクトル
  - 分散共分散行列／標準偏差のベクトル＋相関行列
- ポートフォリオのリスク→線形代数演算
- <u>性質の異なる資産を組み合わせて</u>ポートフォリオを構築することで、リスクの「分散効果」が働く！

ポートフォリオ収益率の分散

- 複数資産のリターンが多次元正規分布に従うと仮定して、ポートフォリオ収益率の分散を計算する。

$X_1, X_2, \cdots, X_N$: 各資産のリターン (確率変数)

$w_1, w_2, \cdots, w_N$: 各資産の保有比率

$(w_1 + w_2 + \cdots + w_N = 1)$

$\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_N$: 各資産の期待リターン

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{1,2} & \cdots & \sigma_{1,N} \\ \sigma_{2,1} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{N,1} & \cdots & \cdots & \sigma_N^2 \end{pmatrix}$$

: リターンの分散共分散行列

$(\sigma_{i,j} = \sigma_{j,i})$ 資産 i と j の共分散

ポートフォリオ収益率の分散

ポートフォリオ全体のリターン

$Y := w_1 X_1 + w_2 X_2 + \cdots + w_N X_N$: ポートフォリオのリターン (確率変数)

$\mu_P := w_1 \mu_1 + w_2 \mu_2 + \cdots + w_N \mu_N$: ポートフォリオの期待リターン

ポートフォリオ全体のリターンの分散:

$$\sigma_P^2 := (w_1 \ \cdots \ w_N)\Sigma \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_N \end{pmatrix}$$

分散共分散行列

$$= \sum_{i=1}^{N} w_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{1 \le i < j \le N} w_i w_j \sigma_{i,j}$$

ポートフォリオのリターンYは、平均μ_P、標準偏差σ_pの正規分布に従う

※あとは1資産の場合の計算に帰着

分散共分散行列

- 分散共分散行列は以下のような行列の積で表される

$$\Sigma = SRS$$

$$S = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \sigma_N \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{1,2} & \cdots & \rho_{1,N} \\ \rho_{2,1} & 1 & \cdots & \rho_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{N,1} & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

R：相関行列　$(\rho_{i,j} = \rho_{j,i})$

資産 i と j の相関係数

※各資産のリターンのリスクと、資産間の相関を別々にモデル化することも可能

リスクの分散効果

簡単な例

各資産のリターンの標準偏差は全てσで、どの2資産間のリターンも相関なしの状況で、等ウェイト（1／N）のポートフォリオを考える（システマティック・リスクが無い状況）。

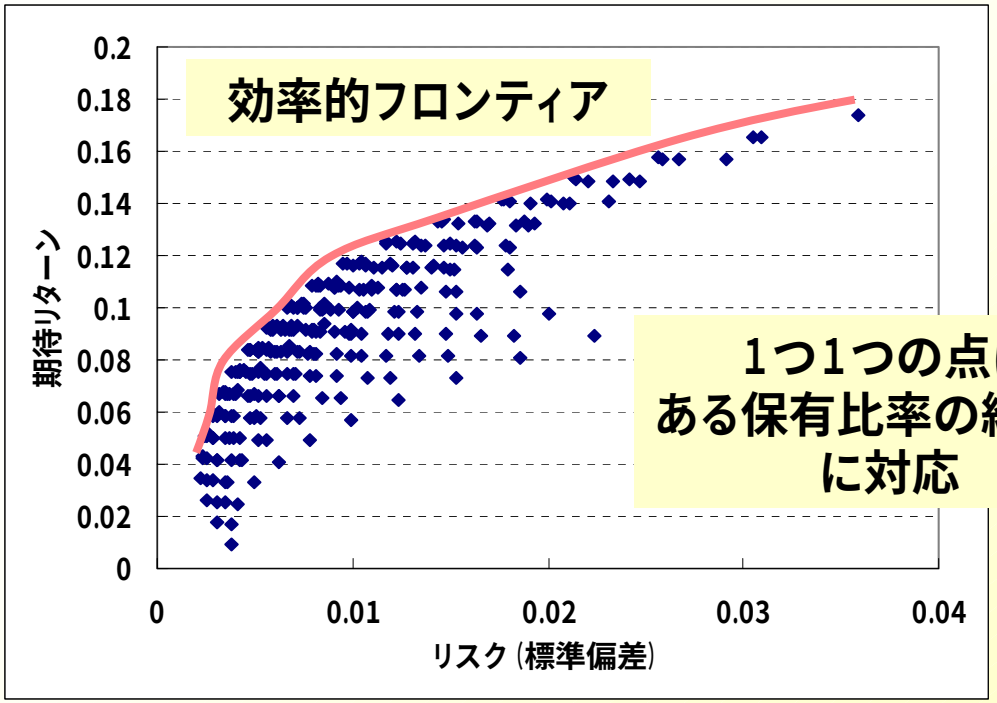
このような場合は、資産数を増やせば増やすほどポートフォリオのリスクは減少していく。

$$\sigma_P^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{N^2}\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{N} \longrightarrow 0 \quad (N \to \infty)$$

リスク（標準偏差）と期待リターンの関係

各資産の保有比率を変化させたときのポートフォリオのリスクーリターンの対応図の例。
理論的には、どのポートフォリオを選択するかは許容できるリスクを所与としたときに、期待リターンが最大化されるようなポートフォリオが選択される。

各リスクに対する最適ポートフォリオの期待リターンを結んだ線（双曲線の半分の形）を効率的フロンティアと呼ぶ



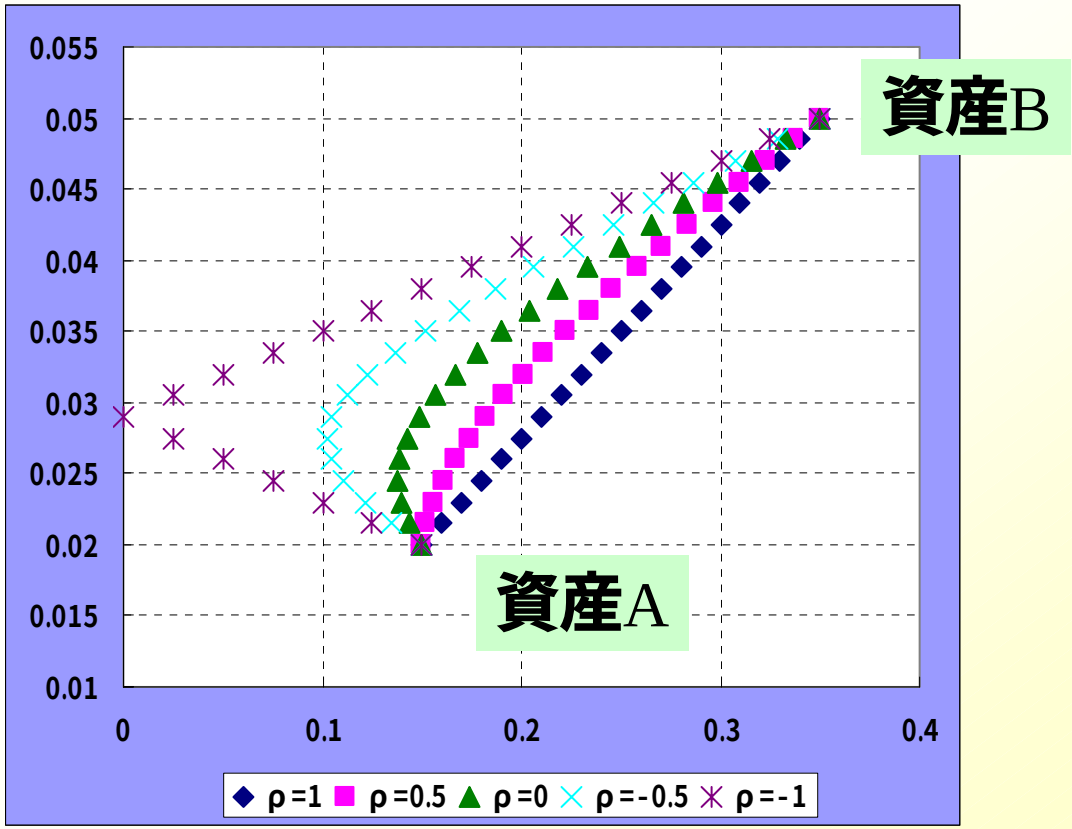
リスク（標準偏差）と期待リターンの関係

2資産の場合

	期待リターン	ボラティリティ
資産A	2%	15%
資産B	5%	35%

ρ：2資産乗りターンの相関係数

※ρ＝－1のとき、リスク（ボラティリティ）＝0となるポートフォリオを組むことができる。
この例では (0.7, 0.3)



CAPM

- CAPM(Capital Asset Pricing Model)の前提
  - 全ての投資家はリスク回避的で、ポートフォリオの1期間後の価値を最大化する投資を選択する
  - 無リスク金利での資金の貸借が可能
  - 全ての投資家は、全資産に対し期待リターン、リスク、相関について同じ予想を持つ
  - 市場は完全（全員がprice taker、情報は平等、取引コストなし）

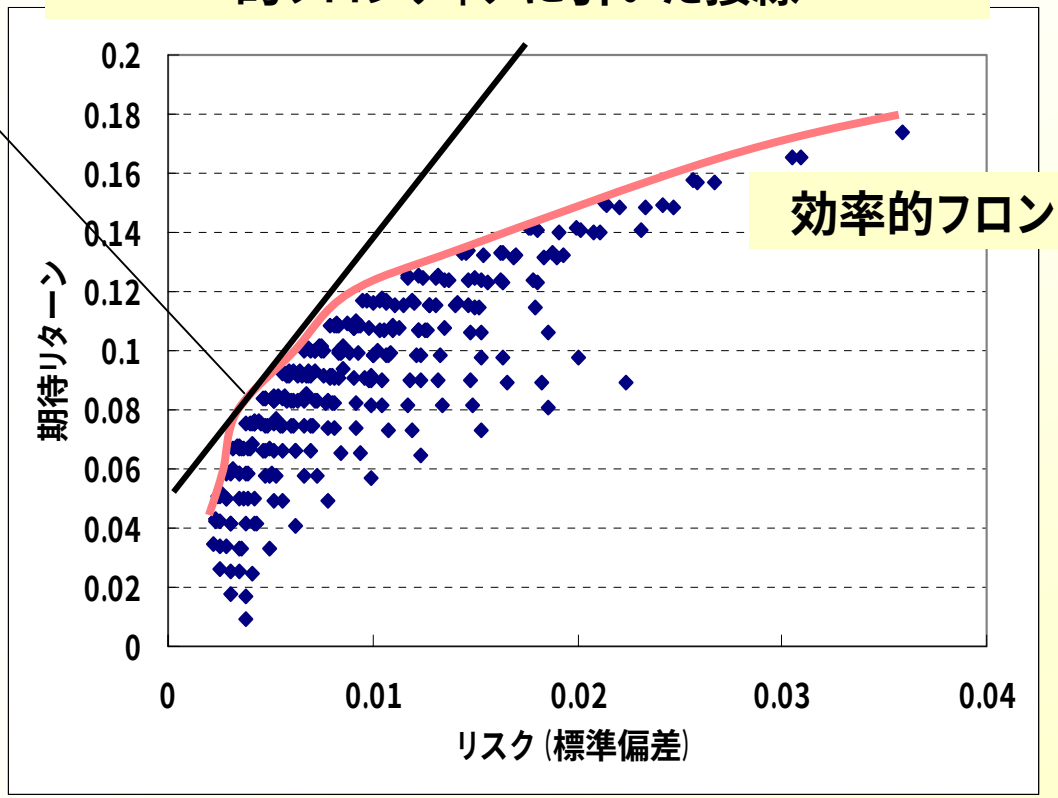
- 結果的に、全ての投資家は同じ効率的フロンティアをもつ（最適ポートフォリオは投資家ごとに異なる）

CAPM

資本市場線：無リスク金利を表す点から効率的フロンティアに引いた接線

効率的フロンティアと資本市場線の接点が**市場ポートフォリオ**（ウェイトは各資産の時価総額の割合に等しくなっているのが名前の由来）

(σ_M, μ_M)



CAPM

- CAPMにおける重要な関係式

μ_M：市場ポートフォリオの期待リターン

σ_M ：市場ポートフォリオのリスク

r_f ：無リスク金利（安全資産のリターン）

μ_i：ある資産iの期待リターン

$$\mu_i - r_f = \beta_i(\mu_M - r_f)$$

ただし、$\beta_i = \dfrac{\sigma_{i,M}}{\sigma_M^2}$

（$\sigma_{i,M}$は資産iと市場ポートフォリオの共分散）

※厳密にはTOPIXと市場ポートフォリオは異なるが、TOPIX を市場ポートフォリオと見なしてCAPMを適用することが多い。

小演習

- 東証33業種の業種別インデックスに等ウェイトで分散投資するポートフォリオを構築する。
このポートフォリオの1日 VaR を過去データを用いて計測する
  - 分散共分散法（簡単のため、期待リターンは全業種について0と仮定する）
  - ヒストリカル法

- TOPIX への単独投資とリスクを比較する

復習：統計学の基礎

- 共分散・相関係数
- 散布図

共分散・相関係数

- 対応関係のあるデータ集合どうしの関係を分析したくなることがある
  - 複数の株価の連動性
  - 為替レートと物価の連動性
  - 売上高の変化率と利益の変化率の関係
- 以下のような対応する2つのデータ集合の関係性を1つの数値で表すことを考える

$$(x_1, x_2, \cdots, x_N),$$

$$(y_1, y_2, \cdots, y_N)$$

共分散･相関係数

- 共分散とは次の計算式で与えられるもの

$$Cov(X,Y)=\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})$$

※EXCEL関数：COVARは *N-1* ではなく、*N* で割ったものを計算

- X,Y それぞれのデータ値が平均からどれくらいずれているかをお互いのずれの方向性の一致具合も符号でとらえて、全体で平均化したもの

共分散･相関係数

- 共分散は2つのグループのデータ値の水準 (単位) に影響される
- データの単位に影響されないように、共分散をそれぞれの標準偏差で割った料を相関係数と呼ぶ。

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\hat{\sigma}_X \hat{\sigma}_Y}$$

※EXCEL関数
CORREL

$\hat{\sigma}_X, \hat{\sigma}_Y : X, Y$ それぞれの標準偏差

共分散・相関係数

- 相関係数は次の関係を満たす

$$-1 \le \rho(X,Y) \le 1$$

$$Y = aX + b$$

$$\Rightarrow \rho(X,Y) = 1(a>0),\ -1(a<0), 0(a=0)$$

- 「相関係数が0に近い」ということは2つのグループが線形関係にはないということを示している
- 「全く関係がない」ということを意味しているのではないことに注意

共分散行列

- 3つ以上の変数の共分散は次のように行列を用いて表す

$X_1, \cdots, X_N$ というN個の確率変数があるとする。

$\sigma_i^2 := Var(X_i),$

$\sigma_{i,j} := Cov(X_i, X_j)$

$$\Sigma := \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{1,2} & \sigma_{1,3} & \cdots & \sigma_{1,N} \\ \sigma_{1,2} & \sigma_2^2 & \sigma_{2,3} & \cdots & \sigma_{2,N} \\ \sigma_{1,3} & \sigma_{2,3} & \sigma_3^2 & \cdots & \sigma_{3,N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{1,N} & \sigma_{2,N} & \sigma_{3,N} & \cdots & \sigma_N^2 \end{pmatrix}$$

相関行列

- 同様に3つ以上の変数の相関は次のように行列を用いて表す

$X_1, \cdots, X_N$ というN個の確率変数があるとする。

$$\rho_{i,j} := \frac{Cov(X_i, X_j)}{\sqrt{Var(X_i)}\sqrt{Var(X_j)}}$$

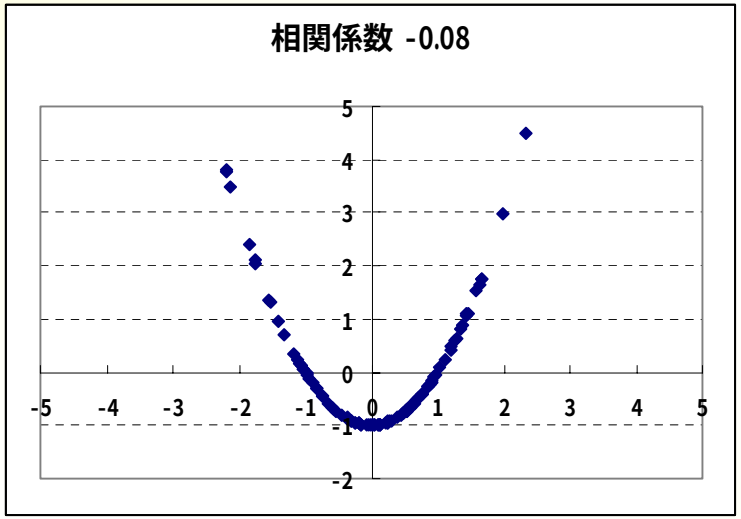
$$\Phi := \begin{pmatrix} 1 & \rho_{1,2} & \rho_{1,3} & \cdots & \rho_{1,N} \\ \rho_{1,2} & 1 & \rho_{2,3} & \cdots & \rho_{2,N} \\ \rho_{1,3} & \rho_{2,3} & 1 & \cdots & \rho_{3,N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{1,N} & \rho_{2,N} & \rho_{3,N} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

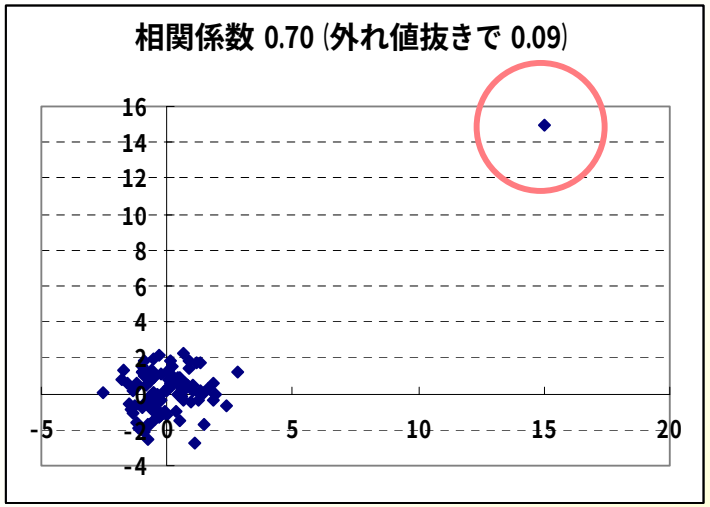
散布図

- 共分散や相関係数だけでは2つのデータ集合間の関係を正しくとらえられない場合もある
- 散布図を描いて、両者の関係を視覚的にとらえることは有効

散布図

☆ 相関係数と「依存関係」についての注意





相関は0に近いが、両者の間には明確な関係が認められる

ほとんどのデータは固まっていて、相関もほとんどないが、大きく外れた1点の影響が全体に及んでいる

発展演習

- 変動額が次のような同じ確率分布に従う2つの金融資産があるとする。ただし、資産の変動は独立であるとする。

変動額	+50万円	0	-100万円
確率	60%	36%	4%

- 2つの資産の変動額をそれぞれX, Y と表すとき、95%信頼水準でのX, Y および X+Y のVaR を求めよ。
- 同様に、95%信頼水準でのX, Y および X+Y のC-VaR を求めよ。