

13 非線形計画 (続き)

13.1 非線形計画問題の解法

非線形計画問題の最適解を求める方法として、次の最急降下法がよく利用される。

[最急降下法 (局所的最適解を求める方法)]

Step.1 適当に近似解 $\mathbf{x}^{(0)}$ を選ぶ。 $t = 0$ とする。

Step.2 $\nabla f(\mathbf{x}^{(t)}) = \mathbf{0}$ であれば、近似解をこれ以上改良できないので、終り。そうでなければ、 $\mathbf{d}^{(t)} = -\nabla f(\mathbf{x}^{(t)})$ とし、 $f(\mathbf{x}^{(t)} + \alpha^{(t)}\mathbf{d}^{(t)})$ が最小となるような正の数 $\alpha^{(t)}$ を選ぶ。 ($\nabla f(\mathbf{x}^{(t)}) \cdot \mathbf{d}^{(t)} < 0$ に注意)

Step.3 $\mathbf{x}^{(t+1)} = \mathbf{x}^{(t)} + \alpha^{(t)}\mathbf{d}^{(t)}$ を次の近似解とし、 $t \leftarrow t+1$ として、Step.2 に戻る。

13.2 制約条件のある場合の最適性条件

関数 f, g_i ($i = 1, 2, \dots, m$) が微分可能で、導関数が連続な凸関数とする。このとき、凸計画問題

$$\begin{aligned} &\text{minimize: } f(\mathbf{x}) \\ &\text{subject to: } g_i(\mathbf{x}) \leq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m) \end{aligned}$$

を考える。このとき、次の定理が成り立つ。

[定理](Kuhn-Tucker 条件) $\mathbf{x}^*$ が上記凸計画問題の最適解であるための必要十分条件は、

$$\begin{aligned} \nabla f(\mathbf{x}^*) + u_1 \nabla g_1(\mathbf{x}^*) + u_2 \nabla g_2(\mathbf{x}^*) + \dots + u_m \nabla g_m(\mathbf{x}^*) &= \mathbf{0}, \\ g_i(\mathbf{x}^*) &\leq 0, \quad u_i g_i(\mathbf{x}^*) = 0, \quad u_i \geq 0, \quad (i = 1, 2, \dots, m) \end{aligned}$$

が成り立つことである。

[例] 凸計画問題

$$\begin{aligned} &\text{minimize: } f(x_1, x_2) = (x_1 - 3)^2 + 2(x_2 - 3)^2 \\ &\text{subject to: } g(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2 - 3 \leq 0 \end{aligned}$$

を考えよう。

$$\nabla f(x_1, x_2) = (2(x_1 - 3), 4(x_2 - 3))$$

から、 $\nabla f(x_1, x_2) = \mathbf{0}$ となるのは $(x_1, x_2) = (3, 3)$ のみである。しかしながら、 $(x_1, x_2) = (3, 3)$ は制約条件を満足しない。

Kuhn-Tucker 条件

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) + u g(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$$

から

$$(2(x_1^* - 3), 4(x_2^* - 3)) + (u, 2u) = (0, 0)$$

を得る。これから、連立方程式

$$\begin{cases} 2(x_1^* - 3) + u = 0 \\ 4(x_2^* - 3) + 2u = 0 \end{cases}$$

を解くことで、

$$(x_1^*, x_2^*) = (3 - u/2, 3 - u/2)$$

が得られる。これを目的関数に代入すると、

$$f(x_1^*, x_2^*) = 3 \left(\frac{u}{2} \right)^2$$

となり、 u は小さければ小さいほど良い。一方、制約条件から、

$$-\frac{3}{2}u + 6 \leq 0$$

すなわち、 $u \geq 4$ が得られ、結局、 $u = 4, x_1^* = 1, x_2^* = 1$ を得る。このとき、 $u > 0$ でありかつ $g(x_1^*, x_2^*) = 0$ なので、これは最適解である。また目的関数 f の最小値は 12 である。

13.3 制約条件のある問題の最適化手法

非線形計画問題

$$\begin{aligned} &\text{minimize: } f(\mathbf{x}) \\ &\text{subject to: } g_i(\mathbf{x}) \leq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m) \end{aligned}$$

に対して、関数

$$P(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \max(0, g_i(\mathbf{x}))^\alpha, \quad \alpha > 1$$

を考えよう。 $P(\mathbf{x})$ は $\mathbf{x}$ が制約条件を満たせば 0 であるが、満たしていなければ正の値を取る。ここで、制約のない最適化問題

$$\text{minimize: } f(\mathbf{x}) + rP(\mathbf{x}) \tag{9}$$

を考え、パラメータ r を大きくしながら、繰り返し式 (9) の最適解を求めるのがペナルティ法である。明らかに $r \rightarrow \infty$ としたとき、この解は $P(\mathbf{x}) = 0$ でなければならず、制約条件を満足することになる。