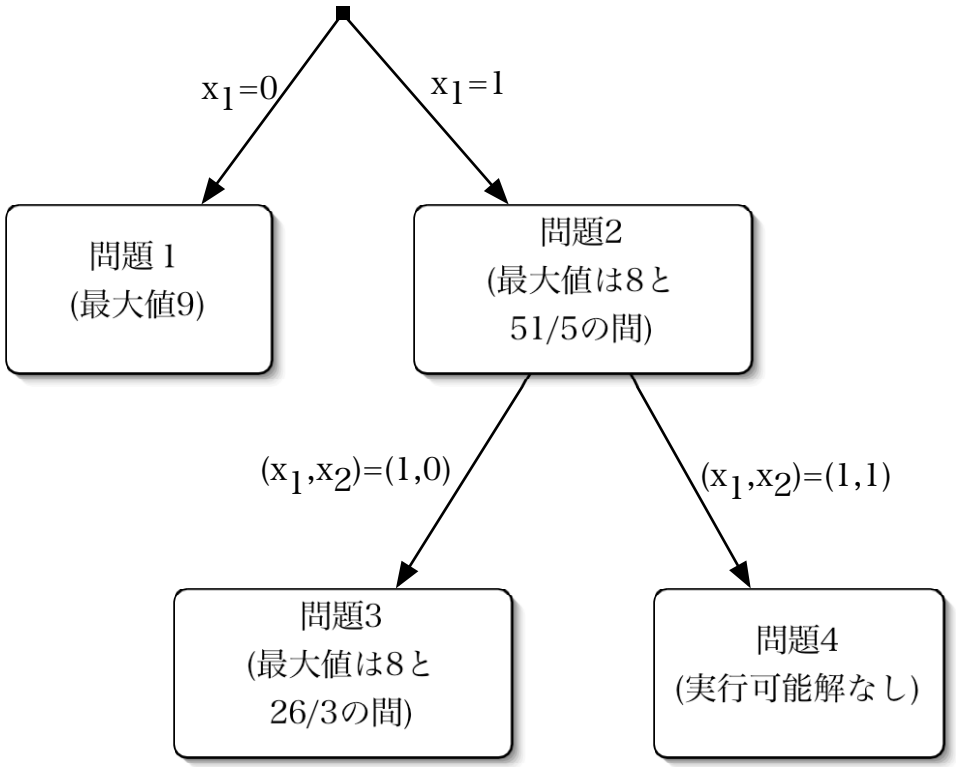


図 32: 分岐限界法によるナップザック問題の解法

# 12 非線形計画

## 12.1 非線形計画問題

非線形計画問題とは、

$$\begin{array}{ll} \text{目的関数}: & f(\boldsymbol{x}) \text{ 最小化} \\ \text{制約条件}: & \boldsymbol{x} \in S \end{array}$$

と定式化される。但し

$$\begin{array}{l} \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in R^n : n \text{ 次元変数ベクトル} \\ f : R^n \to R \text{ (実数値関数)} \\ S : R^n \text{の部分集合} \end{array}$$

である。特に、$S = R^n$ のときを「制約なし問題」と呼ぶ。

また、その問題に対する真の解を大域的最適解と呼び、ある $\boldsymbol{x}_o \in R^n$ のすぐ近くのどの実行可能解 $\boldsymbol{x} + \delta\boldsymbol{x}$ についても、

$$f(\boldsymbol{x}_o) < f(\boldsymbol{x}_o + \delta\boldsymbol{x})$$

が成り立つような $\boldsymbol{x}_o$ のことを局所的最適解という。

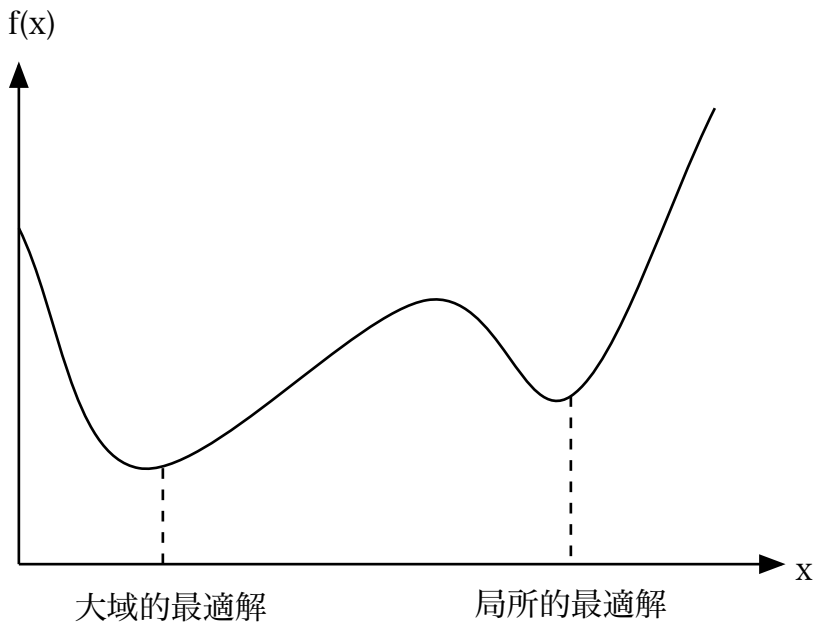


図 33: 大域的最適解と局所的最適解

## 12.2 凸計画問題の性質

いま、関数 $f : R^n \to R$ が任意の $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in R^n$, $0 \leq \alpha \leq 1$ について

$$f(\alpha \boldsymbol{x}_1 + (1-\alpha)\boldsymbol{x}_2) \leq \alpha f(\boldsymbol{x}_1) + (1-\alpha) f(\boldsymbol{x}_2))$$

をみたすとき、$f$ は凸関数であるという（正確には下に凸であることに注意)。

また、集合 $S$ が任意の $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in S$ と $0 \leq \alpha \leq 1$ について

$$\alpha \boldsymbol{x}_1 + (1-\alpha)\boldsymbol{x}_2 \in S$$

をみたすとき、$S$ は凸集合であるという。すなわち、図に示すように、集合 $S$ に含まれる任意の 2 点を結ぶ弦が $S$ に含まれるとき、$S$ は凸集合であるという。このとき、次の定理が成り立つ。

[**定理**]：$f$ が凸関数で、$S$ が凸集合ならば、局所的最適解は大域的最適解となる。

**(証明)** $\overline{\boldsymbol{x}}$ を局所的最適解ではあるが、大域的最適解でないとすれば、$f(\boldsymbol{x}_0) < f(\overline{\boldsymbol{x}})$ をみたす $\boldsymbol{x}_0 \in S$ が存在する。ここで $S$ の凸性より $0 \leq \alpha \leq 1$ に対して

$$\alpha \boldsymbol{x}_0 + (1-\alpha)\overline{\boldsymbol{x}} \in S$$

であり、$f(\boldsymbol{x})$ が凸なので

$$f(\alpha \boldsymbol{x}_0 + (1-\alpha)\overline{\boldsymbol{x}}) \quad \leq \quad \alpha f(\boldsymbol{x}_0) + (1-\alpha) f(\overline{\boldsymbol{x}})$$

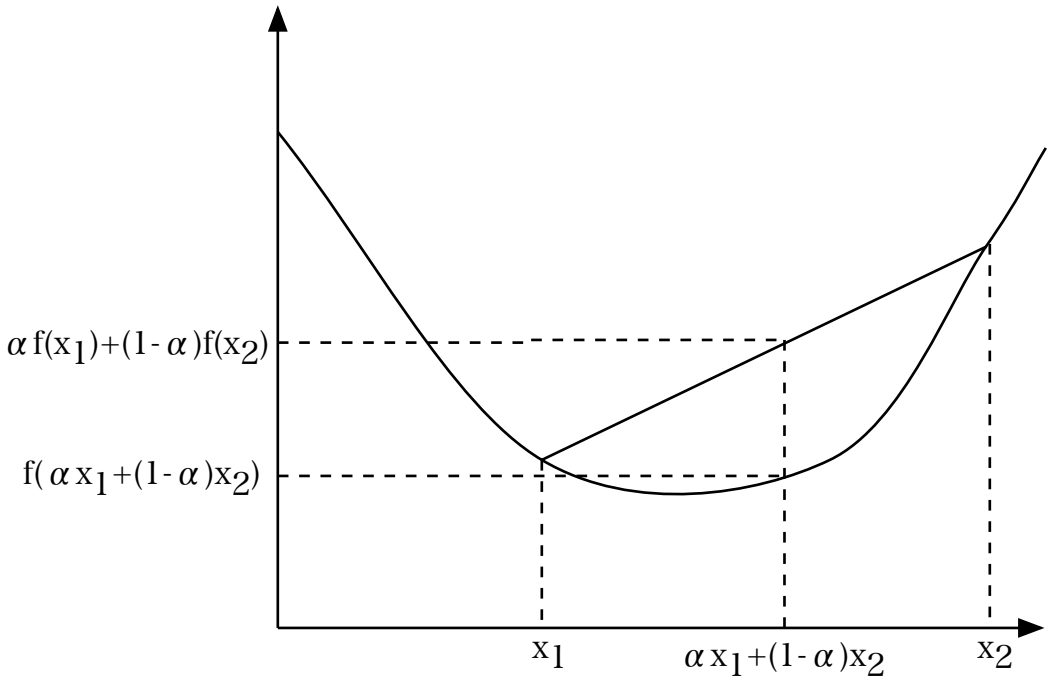


図 34: 凸関数

$$
\begin{aligned}
&< \quad \alpha f(\overline{\boldsymbol{x}}) + (1-\alpha) f(\overline{\boldsymbol{x}}) \\
&= \quad f(\overline{\boldsymbol{x}})
\end{aligned}
$$

が得られ、十分小さな $\alpha > 0$ については

$$f(\alpha \boldsymbol{x}_0 + (1-\alpha)\overline{\boldsymbol{x}}) < f(\overline{\boldsymbol{x}})$$

となり、これは $\overline{\boldsymbol{x}}$ が局所的最適解であることに矛盾する。

## 12.3 最適性条件

制約条件のない最適化問題

$$\text{minimize:} f(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in R^n \tag{8}$$

について、ある $\boldsymbol{x}_o \in R^n$ が最適解であるための条件は次の定理で与えられる。

[**定理**] $f(\boldsymbol{x})$ が微分可能で導関数が連続のとき、$x_o$ が (8) の最適解であるための必要条件は、

$$\nabla f(\boldsymbol{x}_o) \equiv \left( \frac{\partial f(\boldsymbol{x}_o)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(\boldsymbol{x}_o)}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial f(\boldsymbol{x}_o)}{\partial x_n}, \right) = \mathbf{0}$$

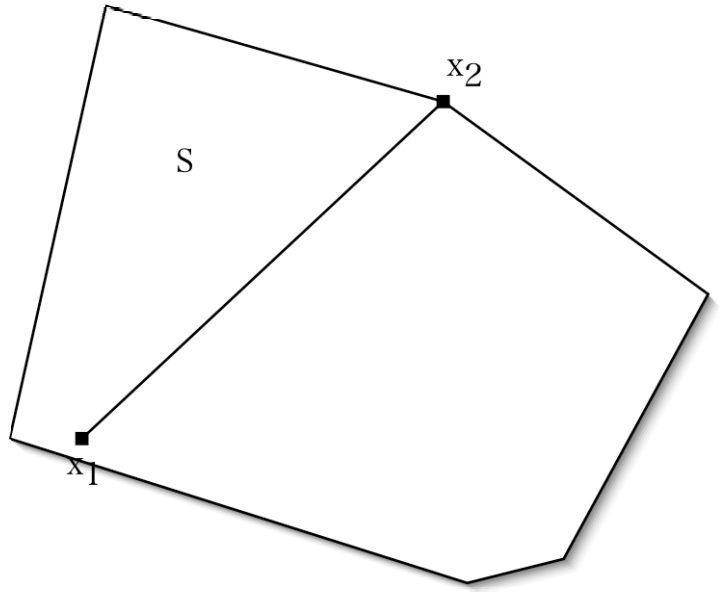


図 35: 凸集合

が成り立つことである。

[**証明**] $\nabla f(\boldsymbol{x}_o) \neq \boldsymbol{0}$ ならば、あるベクトル $\boldsymbol{d} \in R^n$ が存在して（例えば、$-\nabla f(\boldsymbol{x}_o)/\|\nabla f(\boldsymbol{x}_o)\|^2$ とすれば良い）、$\nabla f(\boldsymbol{x}_o) \cdot \boldsymbol{d} < 0$ かつ $\|\boldsymbol{d}\| = 1$ が成り立つ。平均値の定理により、任意の $\epsilon > 0$ に対し、

$$f(\boldsymbol{x}_o + \epsilon \boldsymbol{d}) = f(\boldsymbol{x}_o) + \epsilon \nabla f(\boldsymbol{x}_o + \theta \epsilon \boldsymbol{d}) \cdot \boldsymbol{d}$$

を満たす $0 < \theta < 1$ が存在する。ここで、$\nabla f(\boldsymbol{x})$ が $\boldsymbol{x}$ の連続関数なので、十分小さな $\epsilon > 0$ に対して $\nabla f(\boldsymbol{x}_o + \theta \epsilon \boldsymbol{d}) \cdot \boldsymbol{d} < 0$ となる。従って、

$$f(\boldsymbol{x}_o + \epsilon \boldsymbol{d}) < f(\boldsymbol{x}_o)$$

となり、$\boldsymbol{x}_o$ が局所的最適解であることに矛盾する。

[**定理**]($f(\boldsymbol{x})$ が凸関数の場合) 目的関数 $f(\boldsymbol{x})$ が $R^n$ 上で微分可能な凸関数であるとする。このとき、$\boldsymbol{x}_o$ が制約条件のない最小化問題の最適解であるための**必要十分条件**は、

$$\nabla f(\boldsymbol{x}_o) = \boldsymbol{0}$$

が成り立つことである。

[**証明**] $f(\boldsymbol{x})$ が微分可能な凸関数ならば、任意の $\boldsymbol{x}_o, \boldsymbol{x}_1 \in R^n$ に対して、

$$f(\boldsymbol{x}_1) \geq \nabla f(\boldsymbol{x}_o) \cdot (\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_o) + f(\boldsymbol{x}_o)$$

が成り立つ。従って、$\nabla f(\boldsymbol{x}_o) = \mathbf{0}$ ならば、任意の $\boldsymbol{x} \in R^n$ について

$$f(\boldsymbol{x}) \geq \nabla f(\boldsymbol{x}_o) \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_o) + f(\boldsymbol{x}_o) = f(\boldsymbol{x}_o)$$

が成り立ち、$f(\boldsymbol{x}_o)$ が大域的最適解である。

[**例**] 凸関数 $f(x_1, x_2) = (x_1 - 1)^2 + 2x_2^4$ の $R^2$ での最小値を求めてみよう。

$$\nabla f(x_1, x_2) = (2(x_1 - 1), 8x_2^3) = \mathbf{0}$$

を解いて、$(x_1, x_2) = (1, 0)$ のとき $f(x_1, x_2)$ は最小値 $0$ を取る。