11　整数計画法

整数計画法：「変数が整数のみを取る」という条件の付いた数理計画法。

組合わせ最適化：　各変数の取り得る値が有限個の値に制限されている数理計画法。

11.1　ナップザック問題と欲張り法

[**ナップザック問題**] n 個のアイテムがあり、アイテム $i(=1,2,\cdots,n)$ の重さを a_i、利用価値を c_i とする。総重量 b までしかアイテムをナップザックに入れられないとき、利用価値の総和を最大にするには、どのアイテムを選べば良いか。

ナップザック問題を定式化すると

$$
\begin{aligned}
\text{maximize:} \quad & \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \\
\text{subject to:} \quad & \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq b \\
& x_i \in \{0,1\}, i=1,2,\cdots,n
\end{aligned}
$$

となる。但し、$x_i=1$ はアイテム i を持つことに、また $x_i=0$ はアイテム i を持たないことにそれぞれ対応する。

ナップザック問題を解く為に、全ての場合をしらみつぶしに探すと、2^n 回の計算が必要でありアイテムの個数 n が大きいと計算困難である。そこで、最適解ではないが、最適解に近い解を求める効率の良い方法として次の「欲張り法」が知られている。

[**欲張り法**]

アイテムを「単位重さあたりの利用価値」の大きい順に並べる。すなわち

$$
\frac{c_1}{a_1} \geq \frac{c_2}{a_2} \geq \cdots \geq \frac{c_n}{a_n}
$$

とする。このとき、この尺度の大きいものから順に制約条件をみたす限り多くのアイテムを選ぶ。

[**例**]　ナップザック問題

$$
\begin{aligned}
\text{maximize:} \quad & 7x_1 + 8x_2 + x_3 + 2x_4 \\
\text{subject to:} \quad & 4x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 6 \\
& x_i \in \{0,1\}, i=1,2,\cdots,n
\end{aligned}
$$

を欲張り法によって解くことを考える。まず、

$$
\frac{7}{4} > \frac{8}{5} > \frac{1}{1} > \frac{2}{3}
$$

なので、アイテムは単位重さあたりの利用価値の順に並んでいる。

最初に、$x_1 = 1$ とすると $4 \leq 6$ であり制約条件をみたすので、アイテム 1 をナップザックに入れる。次に、$x_1 = 1, x_2 = 1$ とすると $4 + 5 = 9 > 6$ となり制約条件をみたさないので、$x_2 = 0$ となる。更に、$x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 1$ とすると $4 + 1 = 5 < 6$ であり制約条件をみたすので、アイテム 3 をナップザックに入れる。最後に、$x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 1$ とすると $4 + 1 + 3 = 8 > 6$ となり、制約条件をみたさないので、$x_4 = 0$ となる。従って、実行可能解は、

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 0, 1, 0)$$

であり、このときの目的関数の値は 8 である。

しかしながら、全ての場合をしらみつぶしに調べれば、最適解は (0,1,1,0) であり、目的関数の最大値は 9 である。

欲張り法は実行可能解の 1 つを与えるが、必らずしも 最適解を与えるものではない。従って、欲張り法では、求める最大値の下界が得られることになる。

11.2 連続緩和問題

いま、与えられたナップザック問題

$$\begin{array}{ll} \text{maximize:} & 7x_1 + 8x_2 + x_3 + 2x_4 \\ \text{subject to:} & 4x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 6 \\ & x_i \in \{0, 1\} \end{array}$$

に対して　線形計画問題

$$\begin{array}{ll} \text{maximize:} & 7x_1 + 8x_2 + x_3 + 2x_4 \\ \text{subject to:} & 4x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 6 \\ & 0 \leq x_i \leq 1 \end{array}$$

を考えよう。これは、$0 - 1$ 制約を $0 \leq x \leq 1$ に緩めた問題であり、「連続緩和問題」と呼ばれる。

連続緩和問題については、欲張り法によって最適解を求めることができる。事実、制約条件を満足する範囲で x_1 は 1 まで大きくできるので、$x_1 = 1$ となる。次に、x_2 については $4 + 5x_2 \leq 6$ から $x_2 \leq 2/5$ が得られ、x_2 は 2/5 まで大きくできるので、$x_1 = 1, x_2 = 2/5$ が得られる。このとき、

$$4x_1 + 5x_2 = 4 \times 1 + 5 \times \frac{2}{5} = 6$$

であり、制約条件が等式で満たされるので、他の変数は $x_3 = x_4 = 0$ となる。少し考えると、$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 2/5, 0, 0)$ は連続緩和問題の最適解であり、そのときの目的関数の最大値は

$$7 \times 1 + 8 \times \frac{2}{5} = \frac{51}{5}$$

である。
明らかに

$$[0-1\,\text{制約問題の実行可能領域}] \subset [\text{連続緩和問題の実行可能領域}]$$

なので、

$$[0-1\,\text{制約問題の最大値}] \leq [\text{連続緩和問題の最大値}]$$

となる。従って、連続緩和問題を解くことで、元の問題の最大値の上界を得ることができる。

他方、連続緩和問題の解が全て 0 か 1 ならば、これは元の問題の最適解である。また、連続緩和問題に実行可能解がなければ、元の問題にも実行可能解はない。

この緩和問題をうまく利用して、整数計画法を解く方法が次に述べる分岐限界法である。

11.3 分岐限界法

分岐限界法は、整数計画問題を場合分けによって小問題に繰り返し分割し、最適解がない枝の探索を止めることで、効率的に問題を解く方法である。ここでは、ナップザック問題を例に取って分岐限界法の考え方を説明する。

[**例**] 再びナップザック問題

$$\begin{array}{ll} \text{maximize:} & 7x_1 + 8x_2 + x_3 + 2x_4 \\ \text{subject to:} & 4x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 6 \\ & x_i \in \{0, 1\} \end{array}$$

を取り上げよう。

まず最初の枝分かれとして、$x_1 = 0$ と $x_1 = 1$ を考えよう。これによって問題 1 $(x_1 = 0)$ と問題 2 $(x_1 = 1)$ に分割される。

問題 1 ($x_1 = 0$ の場合)

$$\begin{array}{ll} \text{maximize:} & 8x_2 + x_3 + 2x_4 \\ \text{subject to:} & 5x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 6 \\ & x_i \in \{0, 1\} \end{array}$$

この問題を欲張り法によって解くと、最適解は $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 1, 1, 0)$ のとき最大値 9 となる。一方、この問題に対応する連続緩和問題を解くと、やはり $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 1, 1, 0)$ と最大値 9 が得られる。従って、$x_1 = 0$ の条件下では、$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 1, 1, 0)$ のときに最大値 9 が得られることになる。

問題 2 ($x_1 = 1$ の場合)

$$\begin{array}{ll} \text{maximize:} & 7 + 8x_2 + x_3 + 2x_4 \\ \text{subject to:} & 4 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 6 \\ & x_i \in \{0, 1\} \end{array}$$

この問題を欲張り法によって解くと、最適解は $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 0, 1, 0)$ のとき最大値 8 となる。一方、この問題に対応する連続緩和問題を解くと、$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 2/5, 0, 0)$ と最大値 $51/5$ が得られる。従って、$x_1 = 1$ の条件下では、最大値は 8 と $51/5$ の間にあり、$51/5 > 9$ なので、こちらの分岐に良い解が存在する可能性がある。そこで更に分岐を行い、$(x_1, x_2) = (1, 0)$ の場合と $(x_1, x_2) = (1, 1)$ の場合について考察する。

問題 3 ($(x_1, x_2) = (1, 0)$ の場合)

$$\begin{array}{ll} \text{maximize:} & 7 + x_3 + 2x_4 \\ \text{subject to:} & 4 + x_3 + 3x_4 \leq 6 \\ & x_i \in \{0, 1\} \end{array}$$

この問題を欲張り法によって解くと、最適解は $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 0, 1, 0)$ のとき最大値 8 となる。一方、この問題に対応する連続緩和問題を解くと、$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 0, 1, 1/3)$ と最大値 $26/3$ が得られる。従って、$(x_1, x_2) = (1, 0)$ の条件下では、最大値は 8 と $26/3$ の間にあり、$26/3 < 9$ なので、こちらの分岐には、問題 1 のよりも良い解が存在しないことが分る。

問題 4 ($(x_1, x_2) = (1, 1)$ の場合)

$$\begin{array}{ll} \text{maximize:} & 7 + 8 + x_3 + 2x_4 \\ \text{subject to:} & 4 + 5 + x_3 + 3x_4 \leq 6 \\ & x_i \in \{0, 1\} \end{array}$$

この場合、制約条件を満足するように変数 x_3, x_4 を定めることはできず、実行可能解はない。以上のことから、このナップザック問題の最適解は、$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 1, 1, 0)$ のとき最大値 9 であることが分る。

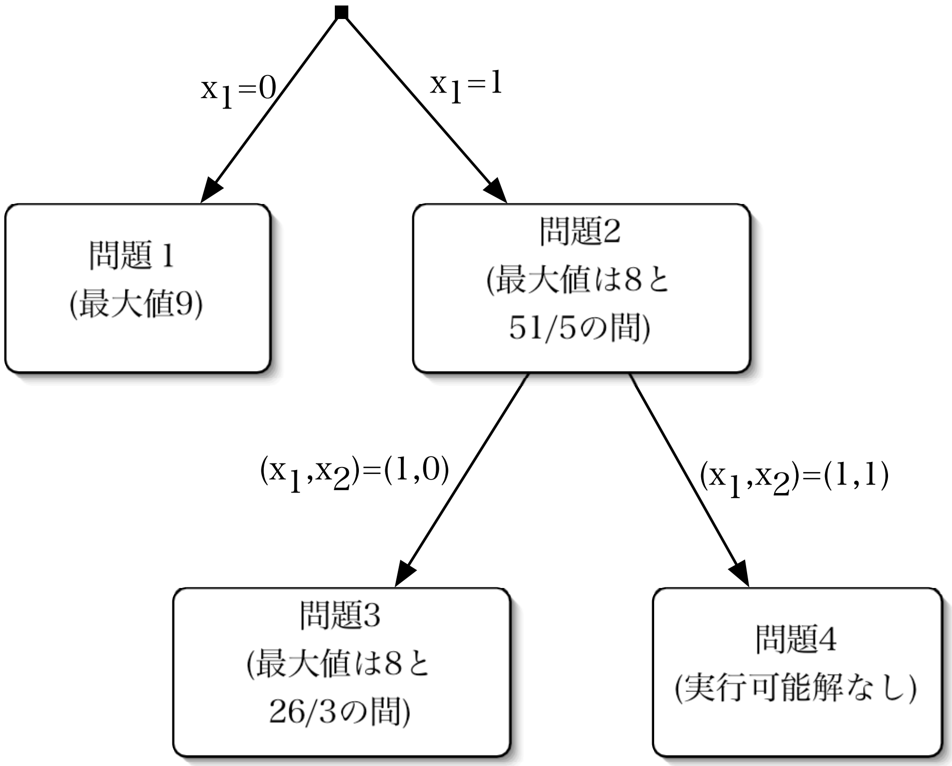

図 32: 分岐限界法によるナップザック問題の解法

12　非線形計画

12.1　非線形計画問題

非線形計画問題とは、

$$\begin{array}{ll} \text{目的関数：} & f(\boldsymbol{x}) \text{ 最小化} \\ \text{制約条件：} & \boldsymbol{x} \in S \end{array}$$

と定式化される。但し

$$\begin{array}{l} \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in R^n : n \text{ 次元変数ベクトル} \\ f : R^n \to R \text{ (実数値関数)} \\ S : R^n \text{の部分集合} \end{array}$$

である。特に、$S = R^n$ のときを「制約なし問題」と呼ぶ。

また、その問題に対する真の解を大域的最適解と呼び、ある $\boldsymbol{x}_o \in R^n$ のすぐ近くのどの実行可能解 $\boldsymbol{x} + \delta\boldsymbol{x}$ についても、

$$f(\boldsymbol{x}_o) < f(\boldsymbol{x}_o + \delta\boldsymbol{x})$$

が成り立つような $\boldsymbol{x}_o$ のことを局所的最適解という。