

10 プロジェクト・スケジューリング

プロジェクトのスケジューリングをネットワークを用いて計算する。Program Evaluation and Review Technique(PERT)とも呼ばれる。

10.1 流れ図とアローダイアグラム

いま、ある作業を行うにあたり直前の作業が指定されたとき、作業の順番を示すものとして流れ図とアローダイアグラムがある。

ここで、アローダイアグラムにおいて並列枝は許されないことと、アローダイアグラムは一意とは限らないことに注意しておく。

10.2 最早開始時刻と最遅終了時刻

さて、 $(i, j) \in E$ ならば、 $i < j$ となるように節点の番号付けを行なう。(これは常に可能である。) 以下、節点 1 は開始結合点、節点 m は終了結合点とするいま、枝 (i, j) に対応する作業 A_{ij} の所要時間を t_{ij} とする (ダミー作業は $t_{ij} = 0$ とする) このとき、プロジェクトを完了するための所要時間を求めるには、 t_{ij} を長さとして、開始結合点 1 から終了結合点 m までの最長距離を求めればよい。最長距離を求める過程で、各作業の最も早く開始できる時刻である「最早開始時刻」を求めることができる。尚、最早開始時刻は節点毎に定まるので、節点 i と節点 j を結ぶ枝に対応する作業 A_{ij} の最早開始時刻を v_i^E によって表す。

[最早開始時刻の計算法]

$v_j^E = 0$, として、 $j = 2, 3, \dots, m$ の順に

$$v_j^E = \max_{(i,j) \in E} (v_i^E + t_{ij})$$

を計算すれば、作業 A_{ij} の最早開始時刻は v_i^E であり、プロジェクトの所要時間は v_m^E である。また、最長距離の経路 (1 本とは限らない) をクリティカル・パスという

さて、プロジェクトを完了するための所要時間を l とするとき、節点 j から m への最長距離を l から引いた値 v_j^L を節点 j の最遅結合点日程という。これはプロジェクト全体の所要時間を延長させないという条件下で、作業 A_{ij} の最も遅い終了時刻 (「最遅終了時刻」と呼ぶ) を表している。

[最遅終了時刻の計算法]

$v_m^L = l$ として $i = m - 1, m - 2, \dots, 1$ の順に

$$v_i^L = \min_{(i,j) \in E} (v_j^L - t_{ij})$$

とする。

10.3 余裕時間と自由余裕

作業 A_{ij} において、 v_i^E が最早開始時刻であるから、 $v_i^E + t_{ij}$ は最早終了時刻である。そこで、

$$u_{ij} = v_j^L - (v_i^E + t_{ij})$$

とおくと $u_{ij} \geq 0$ であり、 $u_{ij} > 0$ ならば作業 A_{ij} の所要時間が u_{ij} だけ延びても他の作業がすべて予定の所要時間で終了するならば、プロジェクト全体の所要時間は変わらない。そこで、 u_{ij} を A_{ij} の全余裕という。

次に、他の作業と独立にとれる余裕時間を求めてみよう。

$$u_{ij}^F = v_j^E - (v_i^E + t_{ij})$$

とすると、明らかに、 $u_{ij} \geq u_{ij}^F \geq 0$ であり、 $u_{ij}^F > 0$ ならば、 A_{ij} の所要時間が u_{ij}^F だけ延びても他の作業の最早開始時刻には影響しない。そこで、 u_{ij}^F を A_{ij} の「自由余裕」という。