

9 最小費用流問題

9.1 最小費用流問題とプライマル・デュアル法

最小費用流問題とは、ネットワークにおいて、全ての節点における需要量・供給量を満足しつつ、コストを最小に（容量制限をみたす）フローを求める問題である（図 24 参照）。

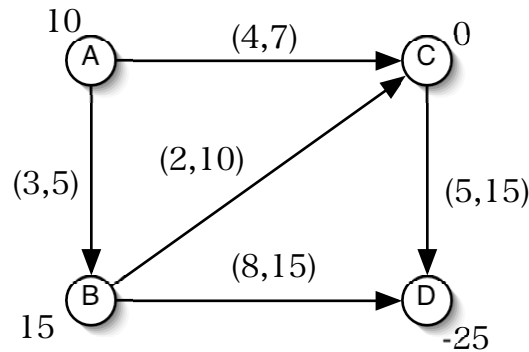


図 24: 最小費用流問題

いま、ネットワーク $G = (V, E)$ に対し、枝 $(i, j) \in E$ における輸送コストを c_{ij} 、容量を u_{ij} 節点 $i \in V$ における需要・供給量を b_i とする。但し、

$$b_i \begin{cases} > 0 & \text{供給量} \\ = 0 & \text{通過節点} \\ < 0 & \text{需要量} \end{cases}$$

である。

ここで、枝 (i, j) 上に輸送する量を変数 x_{ij} によって表すと、最小費用流問題は、次の線形計画問題として定式化される。

$$\begin{aligned} \text{minimize : } & \sum_{(i,j) \in E} c_{ij} x_{ij} \\ \text{subject to : } & \sum_{(v,j) \in E} x_{vj} - \sum_{(i,v) \in E} x_{iv} = b_v \quad \forall v \in V \\ & 0 \leq x_{ij} \leq u_{ij}, \quad \forall (i, j) \in E \end{aligned}$$

最小費用流問題の解法としては、「ソースからシンクまでの路で費用が最小であるものに、できるだけ多くのフローを流す」というアイデアに基づいたプライマル・デュアル法（パスッカー・ゴーウェン法）がある。以下では、供給点（ソース）と需要点（シンク）が1つずつ存在し、他の節点は全て通過点であるネットワークに対して、プライマル・デュアル法を説明する。

[プライマル・デュアル法]

1. 各枝コストを長さと考えて、ソースからシンクまでの最短路を求める。この最短路を通じて最短路に含まれる枝の最小容量に等しいフローを流す。これで流量が必要な需要量に達したら終わり。
2. 得られたフローに対して残余ネットワークを作る。このとき、残余容量はフロー増加法と同様にし、枝のコストについては、反対向きの枝については (-1) 倍のコストにする。
3. 残余ネットワークに対して、コストを長さと考えて最短路を求める（負の長さをもつ枝があるので、ダイクストラ法は使えない）。
4. 最短路に再び、流せるだけのフローを流し、流量が増加したフローを得る。流量が必要な需要に達したら終わり。そうでなければ 2. へ戻る。

例 図 25 のネットワークにおける最小費用流を求めてみよう。節点 A から節点 D

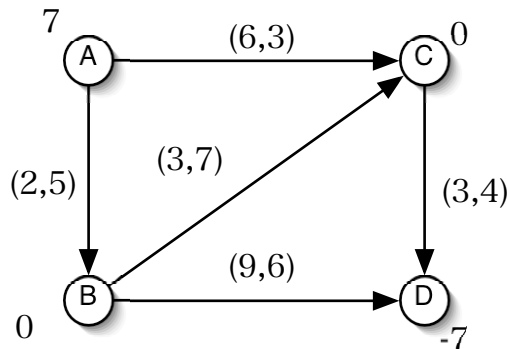


図 25: 最小費用流問題

までの経路を探すと、

$$\begin{array}{ll}
 A \xrightarrow{(2,5)} B \xrightarrow{(9,6)} D & \text{コスト : } 2 + 9 = 11 \\
 A \xrightarrow{(6,3)} C \xrightarrow{(3,4)} D & \text{コスト : } 6 + 3 = 9 \\
 A \xrightarrow{(2,5)} B \xrightarrow{(3,7)} C \xrightarrow{(3,4)} D & \text{コスト : } 2 + 3 + 3 = 8
 \end{array}$$

の3つがある。このうち、コストが最小の経路は、 $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$ であり、そのコストは8である。また、この経路に沿って最大4までのフローが流せるので、このフローを流したものを図 26 に示す。

需要7に対して、まだフローが4しかないので、更に別の経路を探す。第1段階での残余ネットワークを作ると、図 27 が得られる。残余ネットワーク上で、節点

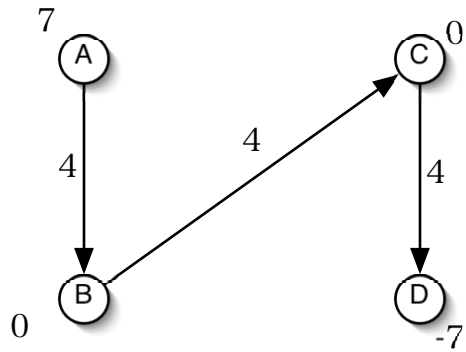


図 26: 第 1 段階のフロー

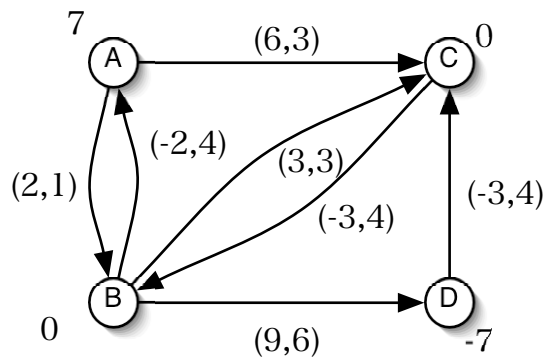


図 27: 第 1 段階の残余ネットワーク

A から節点 D までの経路を探すと、

$$\begin{aligned} A &\xrightarrow{(2,1)} B \xrightarrow{(9,6)} D && \text{コスト} : 2 + 9 = 11 \\ A &\xrightarrow{(6,3)} C \xrightarrow{(-3,4)} B \xrightarrow{(9,6)} D && \text{コスト} : 6 - 3 + 9 = 12 \end{aligned}$$

の 2 つがある。このうち、コストが最小の経路は、 $A \rightarrow B \rightarrow D$ であり、そのコストは 11 である。また、この経路に沿って最大 1 までのフローが流せるので、このフローを流したものを図 28 に示す。

需要 7 に対して、まだフローが 5 しかないので、更に別の経路を探す。第 2 段階での残余ネットワークを作ると、図 29 が得られる。残余ネットワーク上で、節点 A から節点 D までの経路を探すと、

$$A \xrightarrow{(6,3)} C \xrightarrow{(-3,4)} B \xrightarrow{(9,5)} D \quad \text{コスト} : 6 - 3 + 9 = 12$$

だけである。この経路のコストは 12 である。また、この経路に沿って最大 3 までのフローが流せるので、残りのフロー 2 を流したものを図 30 に示す。これで、節

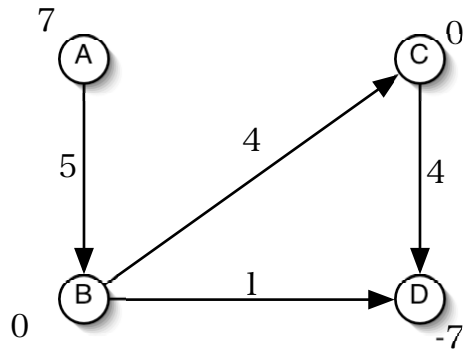


図 28: 第 2 段階のフロー

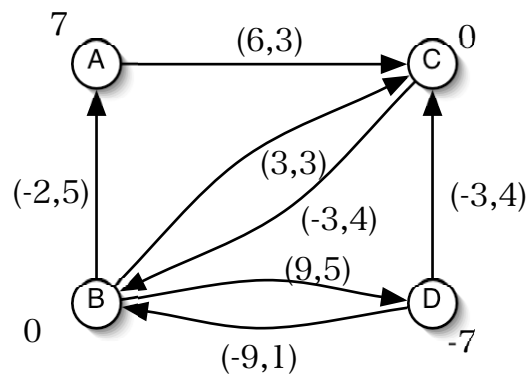


図 29: 第 2 段階の残余ネットワーク

点 A から節点 D に需要 7 を満足するフローが流れたので、終了する。このときのコストは、

$$2 \times 5 + 6 \times 2 + 3 \times 2 + 9 \times 3 + 3 \times 4 = 67$$

である。

9.2 ソースとシンクが複数ある場合

ソースが 3 個、シンクが 2 個ある図 30 のネットワークにおいて、最小費用流を求めることを考えよう。

この場合には、次のようにネットワークを拡張する。全てのソースにおける供給量の総和 $a + b + c$ を供給量とする仮想節点 S と、全てのシンクにおける需要の総和 $-p - q$ を需要とする仮想節点 T を作る。更に、節点 S と各々のソースの間にコストが 0 で容量がそのソースの供給量に等しい枝を、また各々のシンクと節点

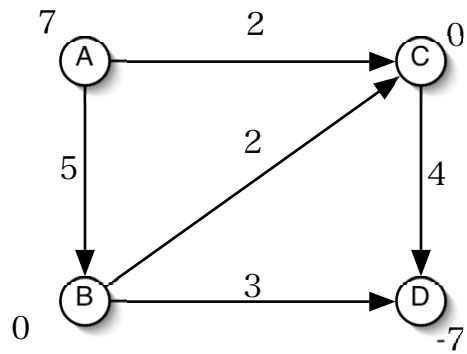


図 30: 第 3 段階のフロー

T の間にコストが 0 で容量がそのシンクの需要に等しい枝を付加する。このようにして得られた拡張ネットワークにおいて節点 S から節点 T までの最小費用流を求めれば、元の問題に対する最小費用流を求めることができる。

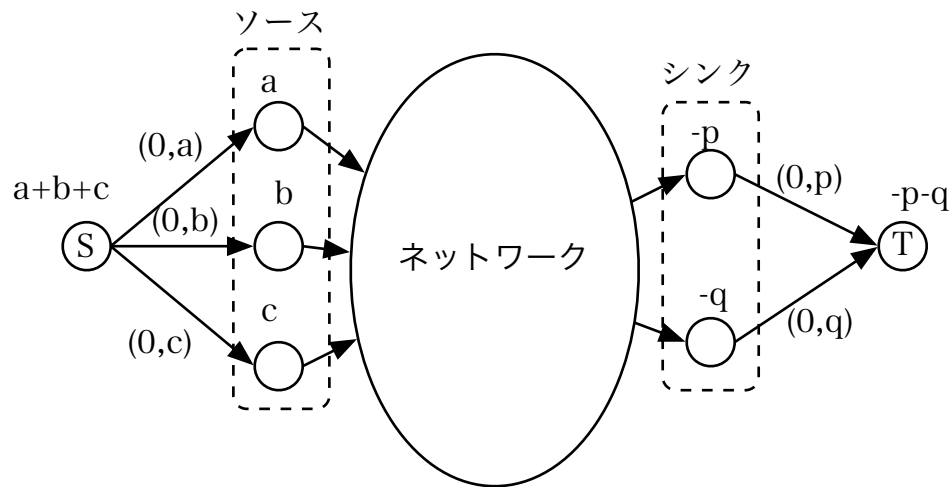


図 31: ソースとシンクが複数ある場合の最小費用流問題