8　ネットワーク計画法（続き）

8.1　フロー増加路を得る方法 — ラベリング法

ラベリング法では、ソースから到達可能な節点に順次ラベルをつけて行く。シンクにラベルがついたとき、ラベルを逆にたどれば所望の経路が求まる。

[**ラベリング法**]

1. 初期設定：$L = \{s\}, S = \emptyset,$ 全ての節点 $i \in V$ に対してラベル $p(i) = 0$ とする。
2. 節点 $\hat{i} \in L \setminus S$ を選び、$S \leftarrow S \cup \{\hat{i}\}$ とする。
3. 全ての枝 $(\hat{i}, j) \in E$ について
$$j \notin L \text{ ならば } L \leftarrow L \cup \{j\}, p(j) \leftarrow \hat{i}$$
とする。
4. $t \in L$ または $L = S$ ならば終る。そうでなければ、2. へ戻る。ここで、$t \notin S$ でラベリング法が終了したら、ソースからシンクへの経路が存在しない。

[**例**] 図 16 のネットワークとフローを考えよう。但し、枝のラベル x/u によって、その枝のフローが x、容量が u であることを表している。これに対応する残余ネッ

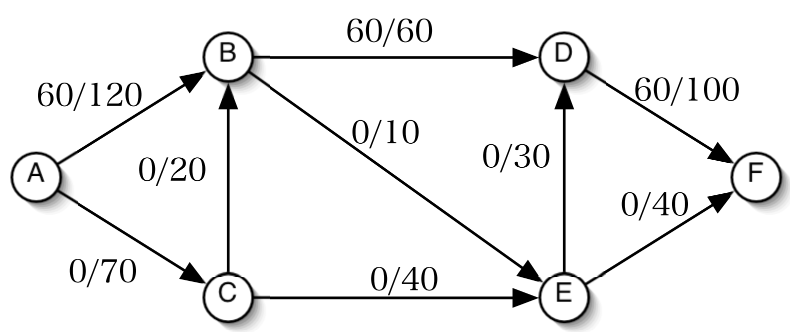


図 16: ネットワークとフロー

トワークは 図 17 となり、ラベリング法を適用すると、

	A	B	C	D	E	F
(0)	<u>0</u>	0	0	0	0	0
(1)		<u>A</u>	A	0	0	0
(2)			<u>A</u>	0	B	0
(3)				0	<u>B</u>	0
(4)				E		E

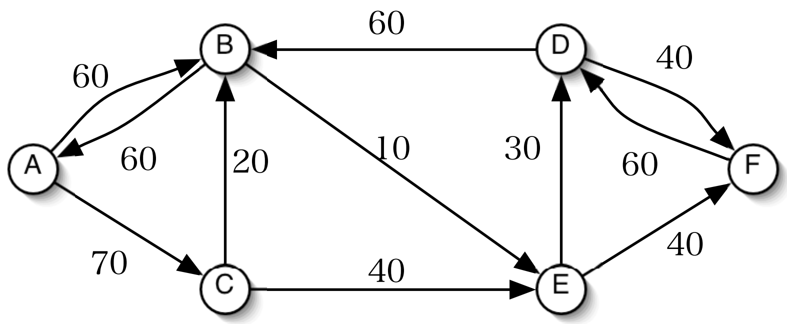


図 17: 残余ネットワーク

が得られる。但し、表中の各行は、その時点での p の値を示しており、下線は選択された節点を表している。これから、経路 $F \xleftarrow{40} E \xleftarrow{10} B \xleftarrow{60} A$ が見つかり、この経路にそって 10 だけフローを増加できる。
[例] 図 18 のネットワークにおいて、節点 A から節点 D までの最大フローを求めてみよう。まず、ラベリング法によって、ソース A からシンク D までの経路を探

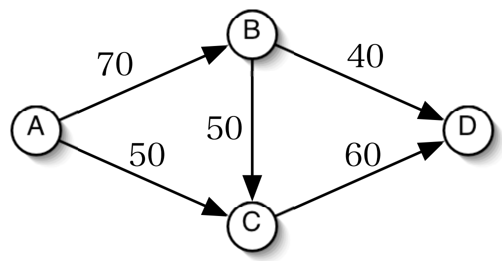


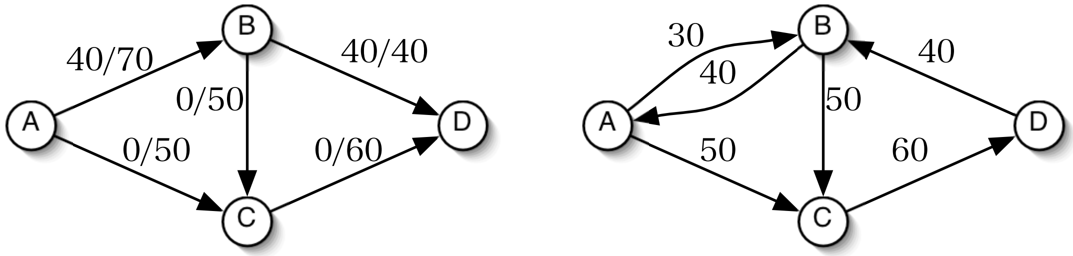
図 18: 最大フローを求めるネットワーク

すと、

	A	B	C	D
(0)	$\underline{0}$	0	0	0
(1)		$\underline{\mathrm{A}}$	A	0
(2)			A	B

が得られ、経路 $D \xleftarrow{40} B \xleftarrow{70} A$ が得られ、この経路に沿ってフローを 40 だけ流すことができる。このフローを流した段階でのネットワークと、対応する残余ネットワークを図 19 に示す。

次に、ラベリング法によって、残余ネットワークにおけるソース A からシンク D までの経路を探すと、

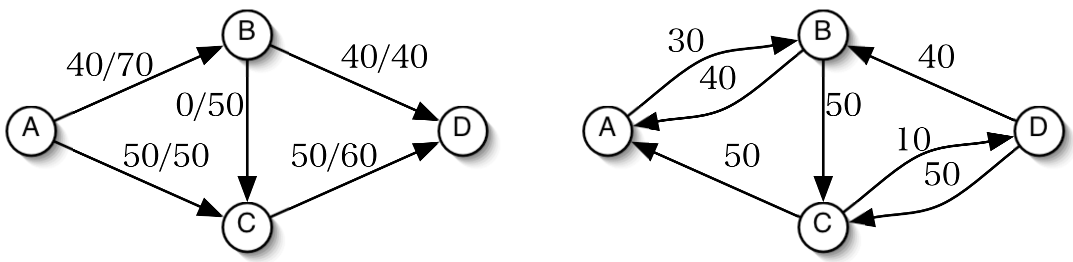


(a)現時点のフロー　　(b)残余ネットワーク

図 19: 最初のフロー

	A	B	C	D
(0)	$\underline{0}$	0	0	0
(1)		$\underline{\mathrm{A}}$	A	0
(2)			$\underline{\mathrm{A}}$	0
(3)				C

が得られ、経路 $D \xleftarrow{60} C \xleftarrow{50} A$ が得られ、この経路に沿ってフローを 50 だけ流すことができる。このフローを流した段階でのネットワークと、対応する残余ネットワークを図 20 に示す。



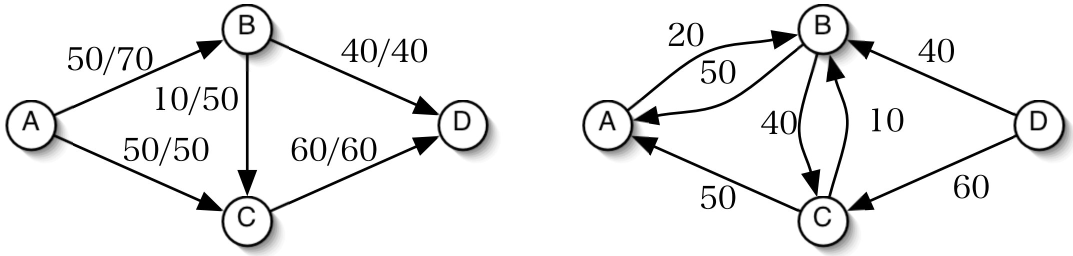
(a)現時点のフロー　　(b)残余ネットワーク

図 20: 第 2 段階のフロー

再び、ラベリング法によって、残余ネットワークにおけるソース A からシンク D までの経路を探すと、

	A	B	C	D
(0)	$\underline{0}$	0	0	0
(1)		$\underline{\mathrm{A}}$	0	0
(2)			$\underline{\mathrm{B}}$	0
(3)				C

が得られ、経路 $D \xleftarrow{10} C \xleftarrow{50} B \xleftarrow{30} A$ が得られ、この経路に沿ってフローを 10 だけ流すことができる。このフローを流した段階でのネットワークと、対応する残余ネットワークを図 21 に示す。



(a)現時点のフロー　　(b)残余ネットワーク

図 21: 第 3 段階のフロー

再び、ラベリング法によって、残余ネットワークにおけるソース A からシンク D までの経路を探すと、

	A	B	C	D
(0)	$\underline{0}$	0	0	0
(1)		$\underline{\mathrm{A}}$	0	0
(2)			$\underline{\mathrm{B}}$	0

が得られ、もはやフロー増加路は存在しない。従って、図 21 のフローが最大フローであり、ソースからシンクへ最大流量は 100 である。

8.2　フロー増加法の正当性

本節では、フロー増加法によって正しく最大流を求めることができることを証明する。

[**カット**]：グラフ $G = (V, E)$ が与えられたとき、節点集合 V をソースを含む集合 S とシンクを含む集合 T に分別したものをカットと呼び、(S, T) と書く。明らかに、

$$V = S \cup T, \quad S \cap T = \emptyset$$

である。

いま、枝の集合 $E(S, T)$ と $E(T, S)$ を

$$\begin{aligned} E(S,T) &= \{(i,j) \in E | i \in S \text{ and } j \in T\} \\ E(T,S) &= \{(i,j) \in E | i \in T \text{ and } j \in S\} \end{aligned}$$

によって定め、「カット容量 $C(S,T)$」を

$$C(S,T) = \sum_{(i,j)\in E(S,T)} u_{ij}$$

によって定義する。(図 22 参照)

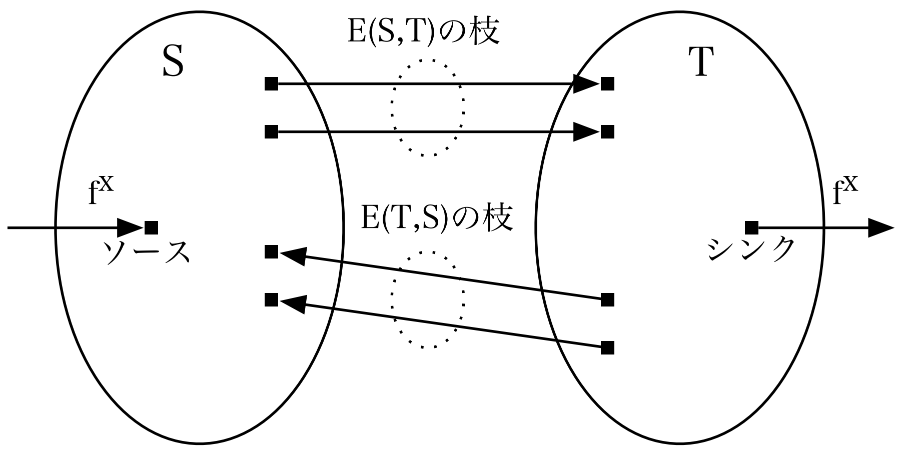


図 22: カット

さて、$\boldsymbol{x}$ を任意のフロー、f^x をその流量、(S,T) を任意のカットとすると、S から T への流量 f^x について、

$$\begin{aligned} f^x &= \sum_{(i,j)\in E(S,T)} x_{ij} - \sum_{(i,j)\in E(T,S)} x_{ij} \\ &\le \sum_{(i,j)\in E(S,T)} x_{ij} \\ &\le \sum_{(i,j)\in E(S,T)} u_{ij} \\ &= C(S,T) \end{aligned}$$

すなわち、

$$f^x \le C(S,T)$$

が成り立つ。この式は任意のカットとフローについて成り立つので、

$$\max_{\boldsymbol{x}} f^x \le \min_{(S,T)} C(S,T)$$

が得られる。但し、min は S と T を分離する全てのカットについて取られる。これから最大流量は、カット容量の最小値より大きくならないことが分る。

さて、ラベリング法を用いたフロー増加法が終了したとき、フロー $\boldsymbol{x}^*$、流量 f^* が得られていたとする。ラベリング法の終了条件から、残余ネットワーク $G^x = (V, E^x)$

に対して、ソースを含みシンクを含まない節点集合 S^* (S から到達可能な節点の集合) が得られる。$T^* = V - S^*$ として、カット (S^*, T^*) を作る。

　このとき、

$$(i,j) \in E(S^*, T^*) \text{ ならば } x^*_{ij} = u_{ij}$$

もしそうでないならば、残余ネットワークには容量 $u_{ij} - x^*_{ij} > 0$ の枝 (i,j) があり、節点 j が S^* に含まれることになり矛盾である。同様に、

$$(i,j) \in E(T^*, S^*) \text{ ならば } x^*_{ij} = 0$$

もしそうでないならば、残余ネットワークには容量 $x^*_{ij} > 0$ の 枝 $(j,i) \in E(S^*, T^*)$ があり、節点 i が S^* に含まれることになる。

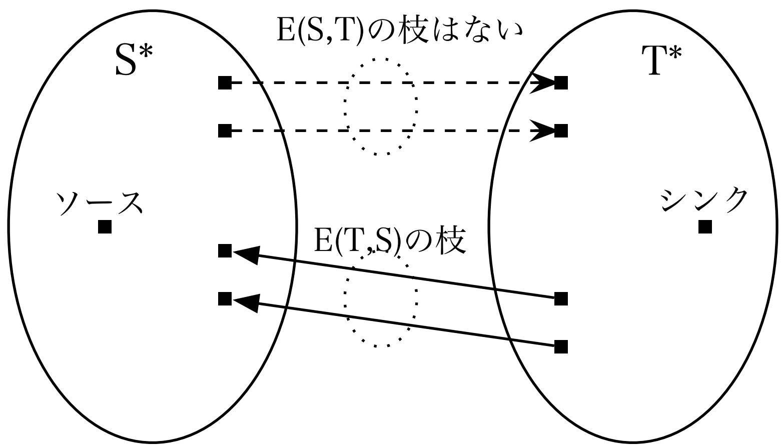


図 23: 残余ネットワークのカット (S^*, T^*)

　従って、フロー x^* の流量 f^* は

$$\begin{aligned} f^* &= \sum_{(i,j)\in E(S^*,T^*)} x^*_{ij} - \sum_{(i,j)\in E(T^*,S^*)} x^*_{ij} \\ &= \sum_{(i,j)\in E(S^*,T^*)} u_{ij} \\ &= C(S^*, T^*) \end{aligned}$$

が得られ、f^* が最大流量であることが分り、$\boldsymbol{x}$ は最大流になっている。以上をまとめて、次の定理を得る。

[**定理 8.1**] （最大流最小カット定理）任意のネットワークにおける、フローの最大流量とカット容量の最小値は等しい。

8.3　フロー増加法の計算量と改良

いま、ネットワーク $G = (V, E)$ における節点数を n、枝数を m、枝容量の最大値（枝容量は全て整数とする）を U によって表す。このとき、

- 1 回のラベリング法の計算量：$O(m)$
- フロー増加法のくり返しで、流量は少なくとも 1 増え、最大フローは高々mU なので、くり返し回数は高々$O(mU)$

従って、全体の計算量は $O(m^2U)$。U が大きいとき、フロー増加法は非効率的となる。**（この計算量の評価はあまりにも緩すぎる。もう少し良い評価で説明の簡単なものを考える必要あり。）**フロー増加法の計算量を改良するには次の方法がある。

[**フロー増加法の改良法**]

1. 複数のフロー増加路があるとき、必らず最も枝数の少ない路を選ぶ。このとき、くり返し回数は $mn/2$ 以下になり、計算量は全体で $O(m^2n)$ となる。

2. 1 度に複数のフロー増加路を求めて、たくさんフローを増加させる。たとえば、あるくり返しでは枝数 3 のフロー増加路を全て求め、全ての増加路に沿ってフローを増加する。
   次のくり返しでは、枝数 4 の増加路を全て求める。すると、くり返しの回数は高々n、複数の増加路を 1 度に求める計算量は $O(mn)$ で実行可能なので、全体の計算量は $O(mn^2)$ となる。