7　ネットワーク計画法

7.1　ネットワークに関する代表的な最適化問題

1. 最短経路問題
   図 8 において節点 A が節点 E までの最短経路を求めよ。（枝に与えられた値 =道の長さ）

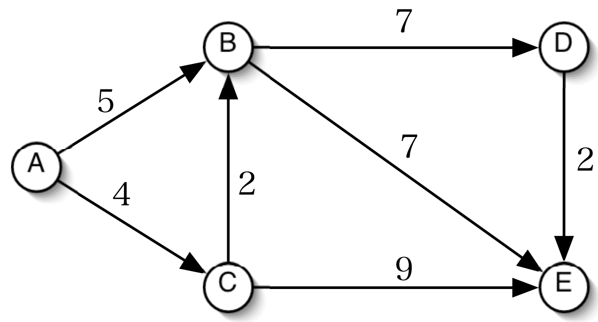


図 8: 枝に値が与えられているネットワーク

2. 最大流問題
   図 8 において節点 A から節点 E まで最大どれだけ流すことができるか（枝に与えられた値=その枝の容量（パイプの太さ））

3. 最小費用流問題
   図 9 において全ての節点における需要量・供給量を満足しつつ、コストを最小にするにはどうしたらよいか。（枝に与えられた値=(コスト、容量)、節点に与えられた値=供給量 (正), 需要量 (負)）

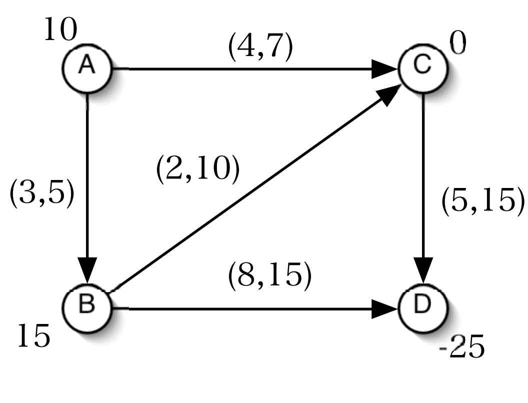


図 9: 枝と節点に値が与えられているネットワーク

7.2 最短経路問題

先ほどの最短経路問題は、枝 (A,B),(A,C),(C,B),(B,D),(B,E),(C,E),(D,E) に対応する変数をそれぞれ $x_1, x_2, \cdots, x_7$ とすれば、次のような線形計画問題として定式化される。

$$
\begin{array}{lrcll}
\text{minimize:} & 5x_1+4x_2+2x_3+7x_4+7x_5+9x_6+2x_7 & & & \\
\text{subject to:} & x_1+x_2 & = & 1 & (A) \\
 & x_4+x_5-x_1-x_3 & = & 0 & (B) \\
 & x_3+x_6-x_2 & = & 0 & (C) \\
 & x_7-x_4 & = & 0 & (D) \\
 & -x_5-x_6-x_7 & = & -1 & (E) \\
 & x_i \geq 0, \quad (i=1,2,\ldots,7) & & &
\end{array}
$$

制約条件は節点の数だけあり、各々の節点に対応している。節点 v に対応する制約条件の左辺は、節点 v から出ている枝に係数 1 を、その節点に入っている枝に係数-1 を付けて総和を取ったものである。また制約条件の右辺は、節点 v が出発節点ならば 1、到着節点ならば-1、その他の節点ならば 0 である。

この線形計画問題を解いて、最適解 $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_7)$ を求め、この最適解から最短経路を次のように定めればよい。

$$
\begin{array}{l}
x_i = 1 \rightarrow \text{枝 } i \text{ が最短経路に含まれる} \\
x_i = 0 \rightarrow \text{枝 } i \text{ が最短経路に含まれる}
\end{array}
$$

実際には、線形計画問題を解くよりも、もっと効率的にこの問題を解く方法がある。それがダイクストラのアルゴリズムである。

ダイクストラのアルゴリズムは、枝に長さが与えられたグラフ $G = (V, E)$ と、1 つの出発節点 (「ソース」と呼ぶ)$s \in V$ が与えられたとき、ソースから任意の節点への最短路（「最短路木」という）を求めるアルゴリズムである。

ダイクストラのアルゴリズム

1. 初期状態として、$S = \emptyset, d(s) = 0, d(i) = \infty \ \forall i \in V \setminus \{s\}$ とする。

2. 集合 S に属さない節点で、$d(v)$ が最も小さい節点 v を選ぶ。

3. $S \longleftarrow S \cup \{v\}$ とする。集合 S に属さない節点で v との間に枝がある全ての節点 w に対して、

   $$d(w) > d(v) + a(v,w) \text{ ならば } d(w) \longleftarrow d(v) + a(v,w), p(v) \longleftarrow v$$

   とする。但し、$a(v,w)$ は枝 (v,w) の長さを表す。

4. $S = V$ ならば終り。そうでないなら、ステップ 2. に戻る。

ダイクストラのアルゴリズムの終了時、ソースから節点 v までの最短距離が $d(v)$、ソースから節点 v までの最短経路で v の直前の節点が $p(v)$ になっている。

[例] 図 8 に示されたネットワークに対して、ソースを A として、ダイクストラのアルゴリズムを適用してみよう。

	A	B	C	D	E	S
(0)	$\underline{0}$	∞	∞	∞	∞	$\{A\}$
(1)		5(A)	$\underline{4}$(A)	∞	∞	$\{A, C\}$
(2)		$\underline{5}$(A)		∞	13(C)	$\{A, B, C\}$
(3)				$\underline{12}$(B)	12(B)	$\{A, B, C, D\}$
(4)					$\underline{12}$(B)	$\{A, B, C, D, E\}$

表で、下線が引いてある数字は、次の繰り返しにおいて選ばれた節点と、ソース A からの最短距離を示している。また、括弧内はその節点の p の値を表している。この表から、最短路木は図 10 のようになる。

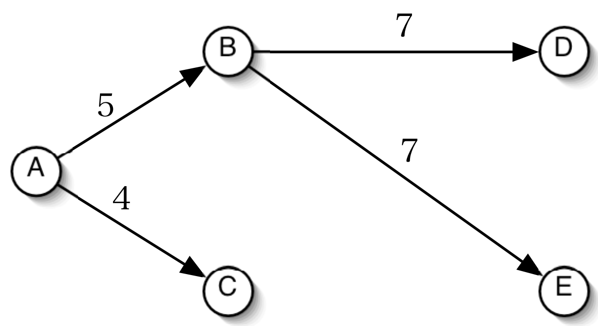


図 10: 最短路木

7.3 最大流問題

図 11 のネットワークにおいて、節点 A（ソース）から節点 D（シンク）まで最大どれだけのフローを流すことができるかという最大流問題を考えよう。

この最大流問題を線形計画問題として定式化すると、枝 (A,B),(A,C),(B,C),(B,D),(C,D)

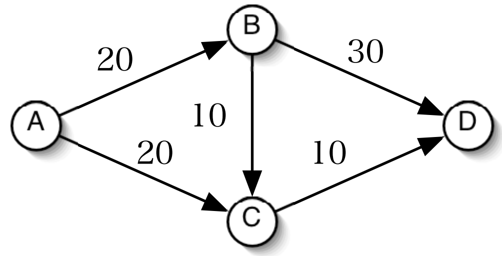


図 11: 最大流問題

に流すフローを $x_1, x_2, \ldots, x_5$ によって表すと、

$$
\begin{array}{lllll}
\text{maximize:} & f & & & \\
\text{subject to:} & x_1 + x_2 & = & f & (A) \\
 & x_3 + x_4 - x_1 & = & 0 & (B) \\
 & x_5 - x_2 - x_3 & = & 0 & (C) \\
 & -x_4 - x_5 & = & -f & (D) \\
 & 0 \leq x_1 \leq 20 & & & \\
 & 0 \leq x_2 \leq 20 & & & \\
 & 0 \leq x_3 \leq 10 & & & \\
 & 0 \leq x_4 \leq 30 & & & \\
 & 0 \leq x_5 \leq 10 & & &
\end{array}
$$

となる。ここで、制約条件 (A)-(D) は、各々の節点において流れ込むフローと流れ出すフローが等しいこと（「流れ保存則」という）を表している。また、残りの制約条件は「容量制約条件」である。この線形計画問題は、これを効率的に解くのがフロー増加法として知られるアルゴリズムである。

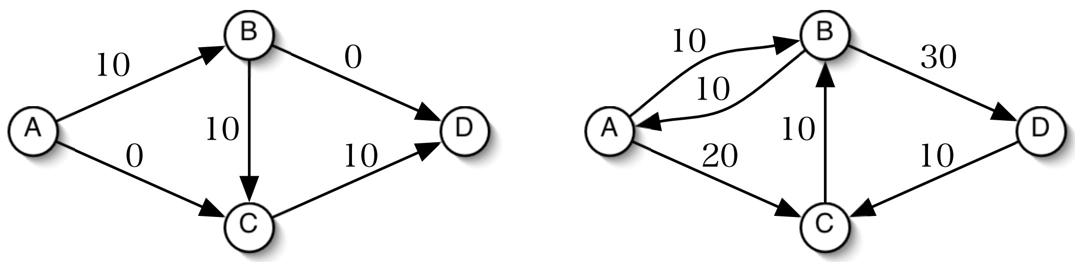
フロー増加法を説明する為に、まず「フロー」と「残余ネットワーク」について述べる。

[**フロー**]
最大流問題に対応する線形計画問題において、流れ保存則と容量制約条件を同時に満たしている変数 $\boldsymbol{x} = \{x_{ij}\}$ を「フロー」と呼ぶ。

[**残余ネットワーク**]
与えられたネットワーク $G = (V, E)$ において、枝 (i, j) の容量を u_{ij} とする。あるフロー $\boldsymbol{x} = \{x_{ij}\}$ が与えられたとき、各枝 $(i, j) \in E$ を容量 $u_{ij} - x_{ij}$ を持つ枝 (i, j) と容量 x_{ij} を持つ枝 (j, i) の 2 本の枝に置き換えて得られるネットワークのことを残余ネットワークという。但し、容量零の枝は除去する。

残余ネットワークでは、与えられたフロー以上にどれだけ、そのネットワークにフローを流せるかを示したものである。従って、残余ネットワークにおいて、ソー

スからシンクへの経路（「フロー増加路」と呼ぶ）が存在するときは、その路にそって、更にフローを増加させることができる。例えば、図 11 のネットワークにおけるフローを図 12(a) のように決めた場合、残余ネットワークは、図 12(b) のようになり、$A \to B \to D$ の経路に沿って 10 だけフローを増加することが可能である。そのようにして得られた新しいフローを図 13 に示す。



(a)フロー　　(b)残余ネットワーク

図 12: フローと残余ネットワーク

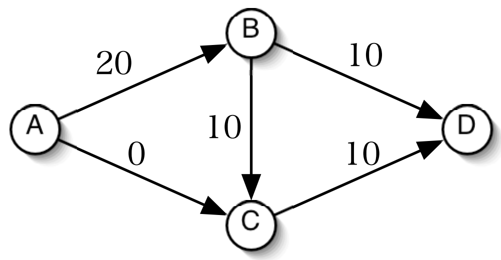
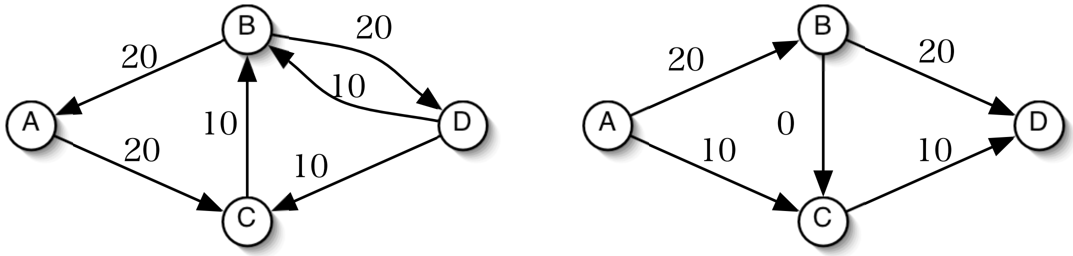


図 13: 流量の増加した新しいフロー

以上の作業をフロー増加路がなくなるまでくり返して最大流を求める方法を、フロー増加法という。

[フロー増加法]

1. 初期フローを得る（例えば、全ての枝 $(i, j) \in E$ について $x_{ij} = 0$）
2. 残余ネットワークを作り、フロー増加路を見つける。フロー増加路が存在しなければ終了。
3. フロー増加路に沿って、フローを追加する。追加するフローの量は、フロー増加路に含まれる枝の容量の最小値に等しい。2. へ戻る。



(a)残余ネットワーク　　(b)新しいフロー

図 14: 残余ネットワークと新しいフロー

[例]　図 13 のフローに対して、残余ネットワークを作ると図 14(a) が得られる。従って、経路 $A \to C \to B \to D$ に沿って、10 だけフローを増加できる。これによって得られた、新しいフローを図 14(b) に示す。このフローに対応する残余ネットワークを作ると図 15 が得られ。もはやフロー増加路は存在しない。従って、図 14(b) がソースからシンクへの最大流を与えるフローである。

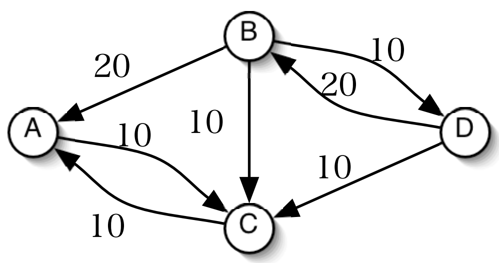


図 15: 残余ネットワーク

フロー増加法では、残余ネットワークからフロー増加路を見つける必要がある。大きなネットワークにおいて増加路を探す方法として、次節のラベリング法が知られている。