# 6　双対定理

[**学習内容**]

- 主問題と双対問題
- 双対定理

　標準形の線形計画問題

$$\begin{aligned} \text{minimize:} \quad z = \quad & \boldsymbol{c}^t\boldsymbol{x} \\ \text{subject to:} \quad & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq 0 \end{aligned}$$

において、$\boldsymbol{c}$ と $\boldsymbol{b}$ を交換し、行ベクトル $\boldsymbol{y}^t$ を変数とする線形計画問題

$$\begin{aligned} \text{maximize:} \quad w = \quad & \boldsymbol{y}^t\boldsymbol{b} \\ \text{subject to:} \quad & \boldsymbol{y}^tA \leq \boldsymbol{c}^t \end{aligned}$$

を「双対問題」という。このとき、元の問題を「主問題」という。また $\boldsymbol{y}$ は非負ベクトルとは限らないことに注意する。

[**例**] 主問題

$$\begin{array}{lrrrcl} \text{minimize:} & z = x_1 & +x_2 & +x_3 & & \\ \text{subject to:} & x_1 & +2x_2 & +3x_3 & = & 5 \\ & 2x_1 & +5x_2 & +4x_3 & = & 12 \end{array}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

双対問題

$$\begin{array}{lrrcl} \text{minimize:} & w = 5y_1 & +12y_2 & & \\ \text{subject to:} & y_1 & +2y_2 & \leq & 1 \\ & 2y_1 & +5y_2 & \leq & 1 \\ & 3y_1 & +4y_2 & \leq & 1 \end{array}$$

　このとき、次の定理が成り立つ。

　[**定理１**]**（弱双対定理）**
$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ をそれぞれ主および双対問題の実行可能解であるとすれば、

$$w = \boldsymbol{y}^t\boldsymbol{b} \leq \boldsymbol{c}^t\boldsymbol{x} = z$$

が成り立つ。

（証明）

$$\boldsymbol{c}^t\boldsymbol{x} \geq (\boldsymbol{y}^tA)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^t(A\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}^t\boldsymbol{b}$$

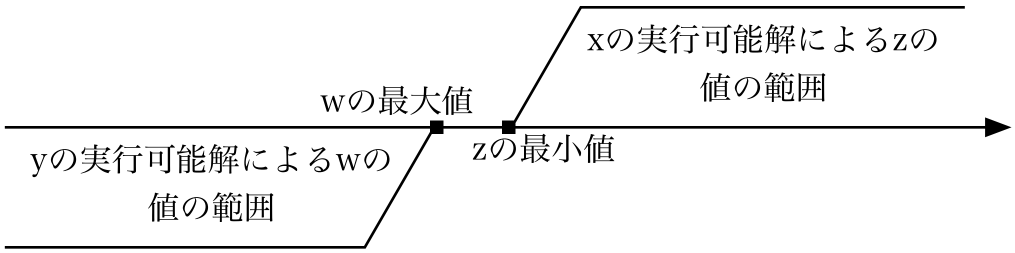


図 7: 弱双対定理の意味

Q.E.D.

[**系**] 主問題のある実行可能解 $\tilde{\boldsymbol{x}}$ と双対問題のある実行可能解 $\tilde{\boldsymbol{y}}$ に対して

$$\boldsymbol{c}^t\tilde{\boldsymbol{x}} = \tilde{\boldsymbol{y}^t}\boldsymbol{b}$$

が成り立てば、$\tilde{\boldsymbol{x}}$ と $\tilde{\boldsymbol{y}}$ はそれぞれ主問題および双対問題の最適解である。

[**定理 2**]（双対定理）
主問題が最適解を持つならば、双対問題も最適解を持ち、主問題の $z$ の最小値と双対問題の $w$ の最大値は等しい。

（証明）$z \leq w$ を示せば良い。$x_1, x_2, \cdots, x_m$ が最適値を与える実行可能基底であるとすれば、主問題のタブローは

| | $x_1 \cdots x_m$ | $x_{m+1} \cdots x_n$ | |
|---|---|---|---|
| | $B$ | $N$ | $\boldsymbol{b}$ |
| | ${\boldsymbol{c}_B}^t$ | ${\boldsymbol{c}_N}^t$ | $0$ |

であり、基底形式に直すと

| | $x_1 \cdots x_m$ | $x_{m+1} \cdots x_n$ | |
|---|---|---|---|
| | $I$ | $B^{-1}N$ | $B^{-1}\boldsymbol{b}$ |
| | $0$ | ${\boldsymbol{c}_N}^t - {\boldsymbol{c}_B}^t B^{-1}N$ | $-{\boldsymbol{c}_B}^t B^{-1}\boldsymbol{b}$ |

が得られる。ここで、$\boldsymbol{y}^t = {\boldsymbol{c}_B}^t B^{-1}$ とおくと

$$\boldsymbol{y}^t B = {\boldsymbol{c}_B}^t B^{-1} B = {\boldsymbol{c}_B}^t$$

他方、最適性から

$${\boldsymbol{c}_N}^t - {\boldsymbol{c}_B}^t B^{-1} N \geq 0$$

すなわち

$${\boldsymbol{c}_N}^t \geq \boldsymbol{y}^t N$$

従って、

$$\boldsymbol{y}^t A = \boldsymbol{y}^t [B\,N] = (\boldsymbol{y}^t B, \boldsymbol{y}^t N) \leq (\boldsymbol{c}_B{}^t, \boldsymbol{c}_N{}^t) = \boldsymbol{c}^t$$

これより、$y$ は実行可能解であり

$$z = \boldsymbol{c}_B{}^t B^{-1} \boldsymbol{b} = \boldsymbol{y}^t \boldsymbol{b} = w$$

が得られ、主問題の $z$ の最小値よりも双対問題の $w$ の最大値が小さくなることはない。 Q.E.D.