

5 退化と2段階シンプレックス法

[学習内容]

- 退化と Bland の最小添字規則
- 2 段階シンプレックス法

5.1 退化

次の線形計画問題を考えよう。

$$\begin{aligned}
 &\text{minimize:} && z = -6x_1 - 10x_2 - 3x_3 \\
 &\text{subject to:} && 4x_1 + 8x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\
 & && -x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_5 = 0 \\
 & && x_2 + x_6 = 1 \\
 & && x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_6 \geq 0
 \end{aligned}$$

タブローは、

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_4	4	<u>8</u>	1	1	0	0	0
x_5	-1	3	2	0	1	0	0
x_6	0	1	0	0	0	1	1
$-z$	-6	<u>-10</u>	-3	0	0	0	0

となり、1 行 2 列をピボット項として、ピボット操作を行うと、

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_2	1/2	1	1/8	1/8	0	0	0
x_5	-5/2	0	13/8	-3/8	1	0	0
x_6	-1/2	0	-1/8	-1/8	0	1	1
$-z$	-1	0	-7/4	5/4	0	0	0

となり、ピボット操作を行っても、目的関数の値は小さくならない。このような場合を「退化」という。「退化」が連続して起こると、基底変数の入れ替えによって再び同一の基底変数が現れることがあり、その場合、最適解を求めることができない。これを防ぐ方法として、次の方法が知られている。

Bland の最小添字規則:

ピボット行、ピボット列の候補が複数あるときには、変数の添字の最も小さいものを選択する。

この規則を用いれば、退化が生じても必ず最適基底解を求めることができる (但し、繰り返し回数は大きくなるが)。

5.2 2段階シンプレックス法

シンプレックス法の実行には、初期実行可能基底解が得られていなければならない。その為には、標準形から基底形式を得る方法が必要である。

[例] 標準形の線形計画問題

$$\begin{aligned} \text{minimize:} \quad & z = -2x_1 - x_2 - x_3 \\ \text{subject to:} \quad & x_1 + 2x_2 = 12 \\ & x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 20 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

を考えよう。タブローでは、

	x_1	x_2	x_3	
	1	2	0	12
	1	4	3	20
$-z$	-2	-1	-1	0

となり、どこにも単位行列を含んでいない。そこで、各制約条件式に新たな変数 x_4, x_5 をそれぞれ導入した次の問題を考える。

$$\begin{aligned} \text{minimize:} \quad & w = x_4 + x_5 \\ \text{subject to:} \quad & x_1 + 2x_2 + x_4 = 12 \\ & x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_5 = 20 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

この問題を元の問題の「補助問題」と呼び、 x_4, x_5 を「人為変数」という。補助問題を解き、 $w = 0$ を得たとき、 $x_4 = x_5 = 0$ なので、最適解 (x_1, x_2, x_3) は元の問題の制約条件式

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 12 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 20 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

を満たしており、 (x_1, x_2, x_3) は元の問題の実行可能基底解である。他方、 $w > 0$ のときは、元の問題に実行可能解は存在しない。

タブローで補助問題を書くと、

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_4	1	2	0	1	0	12
x_5	1	4	3	0	1	20
$-w$	0	0	0	1	1	0

となっており、 $-w$ の行の x_4 と x_5 の係数をピボット操作で零にすれば、

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_4	1	2	0	1	0	12
x_5	1	<u>4</u>	3	0	1	20
$-w$	-2	<u>-6</u>	-3	0	0	-32

が得られ、これは基底形式である。後は、シンプレックス法を用いて

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_4	<u>$1/2$</u>	0	$-3/2$	1	$-1/2$	2
x_2	$1/4$	1	$3/4$	0	$1/4$	5
$-w$	<u>$-1/2$</u>	0	$3/2$	0	$3/2$	-2

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	1	0	-3	2	-1	4
x_2	0	1	$3/2$	$-1/2$	$1/2$	4
$-w$	0	0	0	1	1	0

従って、最適解は $x_1 = 4, x_2 = 4, x_3 = 0$ となり、このとき $w = 0$ なので、これは元の問題の実行可能基底解である。そこで、元の問題のタブロー

	x_1	x_2	x_3	
x_1	1	0	-3	4
x_2	0	1	$3/2$	4
$-z$	-2	-1	-1	0

において、 $-z$ 行の x_1, x_2 の係数を零にして、

	x_1	x_2	x_3	
x_1	1	0	-3	4
x_2	0	1	<u>$3/2$</u>	4
$-z$	0	0	<u>$-11/2$</u>	12

から、シンプレックス法を始めれば良い。シンプレックス法によれば、最終的なタブローは

	x_1	x_2	x_3	
x_1	1	0	-3	4
x_3	0	$2/3$	1	$8/3$
$-z$	0	$11/3$	0	$80/3$

であり、 $x_1 = 12, x_2 = 0, x_3 = 8/3$ のとき最小値 $z = -80/3$ が得られる。このように補助問題を一度シンプレックス法で解き、得られた実行可能基底解を用いて元の問題をシンプレックス法で解く方法を2段階(シンプレックス)法と呼ぶ。

[2 段階法]

1. 制約条件式の右辺の定数を全て非負にする。
2. 制約条件式の数だけ人為変数を導入し、その和を最小化する補助問題を作る。
3. 補助問題をシンプレックス法で解く。目的関数が 0 にならなかつたら、元の問題は実行可能解を持たない。
4. もし、補助問題の最適解の基底に人為変数が含まれれば、基底の変換によって基底からはずしておく。
5. 人為変数を全て 0 とし、元の問題の実行可能基底解を求める。
6. 得られた実行可能基底解からシンプレックス法によって元の問題を解く。