4 基底形式とシンプレックス法

[学習内容]

- ピボット操作
- 基底形式とタブロー
- シンプレックス法

4.1 基底形式

標準形の線形計画問題

$$\begin{array}{ll} \text{minimize:} & z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\ & \left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right\} \quad (5) \\ \text{subject to:} & \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (6) \end{array}$$

を考えよう。以下では、 $n > m$ とし、 A のランクは m とする。ここで、目的関数を等式

$$-z + c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n = 0 \quad (7)$$

として取り扱い、制約式に含めることにすれば、線形計画問題は式 (5), 式 (7) と非負条件 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$ を満たし、 z を最小にする解を求めることと等価である。

標準形の線形計画問題を解くための基本操作として、次のピボット操作を用いる。

[定義] (ピボット操作)

- (1) r 行 s 列におけるピボット項と呼ばれる項 $a_{rs} \neq 0$ を選ぶ。
- (2) r 番目の式の両辺を a_{rs} で割る。
- (3) $i (\neq r)$ 番目の等式を (2) によって得られた新しい r 番目の式に $-a_{is}$ を掛けた式との和で置き換える。

このようなピボット操作を m 回くり返し、変数の順番を適切に入れかえること

で、標準形の線形計画問題は

$$\begin{array}{rcccccl}
 x_1 & & & +\bar{a}_{1m+1}x_{m+1} & +\cdots & +\bar{a}_{1n}x_n & = & \bar{b}_1 \\
 x_2 & & & +\bar{a}_{2m+1}x_{m+1} & +\cdots & +\bar{a}_{2n}x_n & = & \bar{b}_2 \\
 \vdots & & & \vdots & & \vdots & & \\
 x_m & & & +\bar{a}_{mm+1}x_{m+1} & +\cdots & +\bar{a}_{mn}x_n & = & \bar{b}_m \\
 -z & & & +\bar{c}_{m+1}x_{m+1} & +\cdots & +\bar{c}_n x_n & = & -\bar{z}
 \end{array}$$

と書き直される。このように、基底変数 $x_1, x_2, \dots, x_m$ についての係数がある唯一つの式で1、その他の式で0となるように変換された等価な連立方程式を「基底形式」と呼ぶ。

ここで、非基底変数 $x_{m+1}, \dots, x_n$ の値が定めれば、 $x_1, \dots, x_m$ および $(-z)$ は一意に定まることに注意する。

[例] 次の線形計画問題を考えよう。

$$\begin{array}{l}
 \text{minimize: } z = -2x_1 - x_2 + x_3 \\
 \text{subject to: } \quad 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 12 \\
 \quad \quad \quad 4x_1 + 3x_2 + x_3 + x_5 = 8 \\
 \quad \quad \quad x_1 \geq 0, \dots, x_5 \geq 0
 \end{array}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} : \text{ランクは2}$$

x_4, x_5 についての基底形式を求めると、ピボット操作により

$$\begin{array}{rcccccl}
 3x_1 & +2x_2 & +2x_3 & +x_4 & & = & 12 \\
 4x_1 & +3x_2 & +x_3 & & +x_5 & = & 8 \\
 -z & -2x_1 & -x_2 & +x_3 & & = & 0
 \end{array}$$

が得られる。基底形式は、「シンプレックス・タブロー」あるいは「単体表」と呼ばれる次の形の表にまとめることができる。

基底	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	定数
x_4	3	2	2	1	0	12
x_5	4	3	1	0	1	8
$-z$	-2	-1	1	0	0	0

このとき、 x_4, x_5 を基底変数とする基底解は、 $x_4 = 12, x_5 = 8, x_1 = x_2 = x_3 = 0$ となりこれは実行可能解である。一般に、 z の行を除いて定数が全て正のタブローを「実行可能タブロー」という。

さて、2行1列をピボットにして、ピボット操作を行なうと

基底	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	定数
x_4	0	-1/4	5/4	1	-3/4	6
x_1	1	3/4	1/4	0	1/4	2
$-z$	0	1/2	3/2	0	1/2	4

となり、 x_1, x_4 が基底変数となり、 x_2, x_3, x_5 を増加させても z は減少しない。従って、 $x_2 = x_3 = x_5 = 0, x_4 = 6, x_1 = 2$ は最適解であり、このとき目的関数は最小値-4 を取ることが分る。

4.2 シンプレックス法

線形計画問題

$$\begin{aligned} \text{minimize: } z &= -x_1 - x_2 \\ \text{subject to: } 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 12 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 &= 8 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

を考えよう。この制約条件式は、 x_3 と x_4 を基底変数とする基底形式である。従って、タブローで表すと

	x_1	x_2	x_3	x_4	定数
x_3	3	2	1	0	12
x_4	1	2	0	1	8
$-z$	-1	-1	0	0	0

この場合の基底解 $x_1 = x_2 = 0, x_3 = 12, x_4 = 8$ は実行可能解であり、目的関数の値は0である。タブローの z の行は $(-1, -1, 0, 0)$ なので、 x_1 か x_2 を増やせば、目的関数は小さくなる。例えば、 $x_1 = 0$ としたまま、 x_2 を大きくすると制約条件 $3x_1 + 2x_2 + x_3 = 12$ と $x_3 \geq 0$ から、 $x_2 \leq 6$ が得られる。他方、制約条件 $x_1 + 2x_2 + x_4 = 8$ と $x_4 \geq 0$ からは、 $x_2 \leq 4$ が得られる。従って、制約条件を満たしつつ、 x_2 は4まで大きくできる。 $x_2 = 4$ として、 x_2 を基底変数にすれば、 $x_4 = 0$ となり、 x_4 が基底変数ではなくなる。この一連の操作をタブローで行なうのがシンプレックス法である。

1. 実行可能基底解が得られているとする（どうやって得るかは後述）

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_3	3	2	1	0	12
x_4	1	2	0	1	8
$-z$	-1	<u>-1</u>	0	0	0

2. z の行で負の係数をもつ列を1つ選ぶ。(ピボット列) 全てが正または零ならば、現在の基底解が最適解である。
3. ピボット列の中で正の係数を持つ行について、定数を係数で割り、最小の値を取る行を選ぶ。

	x_1	x_2	x_3	x_4		
x_3	3	<u>2</u>	1	0	12	$(12/2 = 6)$
x_4	1	<u>2</u>	0	1	8	$(8/2 = 4)$
$-z$	-1	<u>-1</u>	0	0	0	

従って、ピボット行は第2行となる。

4. ピボット操作を行なう。

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_3	2	0	1	-1	4
x_2	1/2	<u>1</u>	0	1/2	4
$-z$	-1/2	0	0	1/2	4

この結果 x_2 と x_3 を基底変数としたタブローが得られる。

5. 再び 2. に戻ってくり返す。今度は、1行1列がピボット項として選ばれる。

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_1	<u>1</u>	0	1/2	-1/2	2
x_2	0	1	-1/4	3/4	3
$-z$	0	0	1/4	1/4	5

ここで z の行の係数は全て非負なので、 $x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = x_4 = 0$ は最適解であり、目的関数の値は-5である。

[例]

$$\begin{aligned}
 &\text{minimize: } z = -3x_1 - 2x_2 \\
 &\text{subject to: } 2x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\
 &\quad \quad \quad x_1 + 2x_2 + x_4 = 6 \\
 &\quad \quad \quad x_1 \geq 0, \dots, x_4 \geq 0
 \end{aligned}$$

タブローは、

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_3	<u>2</u>	1	1	0	6
x_4	1	2	0	1	6
$-z$	<u>-3</u>	-2	0	0	0

となり、順にピボット操作を行うことで、(ピボット項は下線で表示)

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_1	1	1/2	1/2	0	3
x_4	0	<u>3/2</u>	-1/2	1	3
$-z$	0	<u>-1/2</u>	3/2	0	9

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_1	1	0	2/3	-1/3	2
x_2	0	1	-1/3	2/3	2
$-z$	0	0	4/3	1/3	10

従って、最適解は $x_1 = 2, x_2 = 2, x_3 = x_4 = 0$ となる。また、目的関数の最小値は-10である。

2週後に小テストを行うことの予告を忘れないように。