

3 線形計画法の基本定理

[学習内容]

- 線形計画問題の基本定理

次の定理は、実行可能基底の重要性を示すものである。

[線形計画法の基本定理]

線形計画問題が与えられたとき、次のことが成り立つ。

- (1) 実行可能解が存在するならば、必ず実行可能基底解が存在する。
- (2) 最小解が存在するならば、実行可能基底解の中にも最小解が存在する。

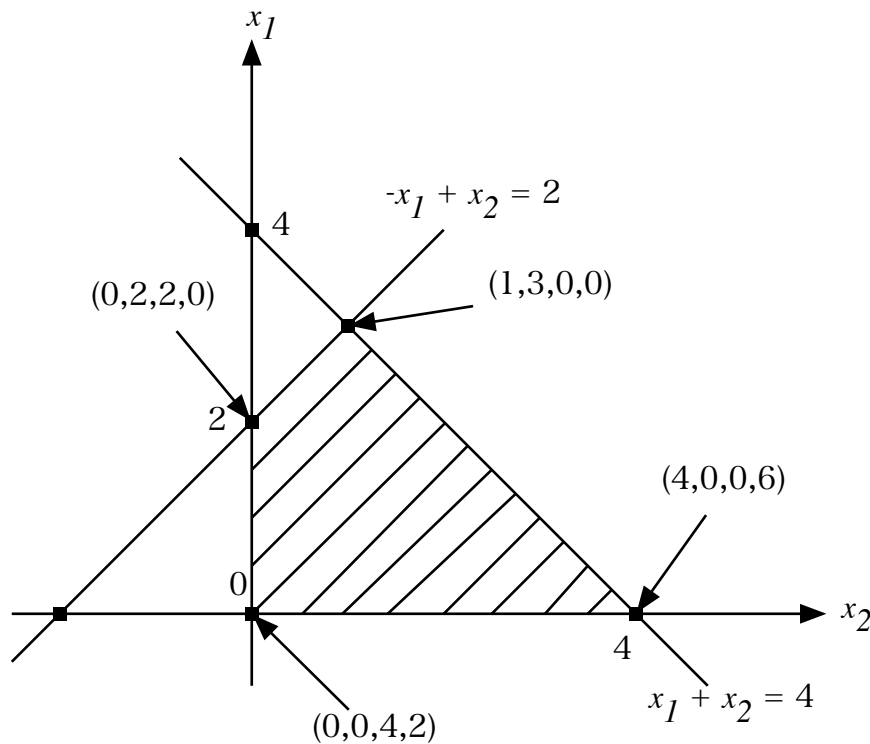


図 6: 実行可能解（図の斜線部中の点）と実行可能基底解（斜線部の頂点）

この定理から、 n 変数、等式制約条件 m 個の標準形の線形計画問題では、 $n - m$ 個の変数を零にすれば実行可能基底解が得られるので、実行可能基底解は高々 $\binom{n}{n-m} = \binom{n}{m}$ 個しかない。従って、これらの実行可能基底解の中で、目的関数を最小にするものを探せば良い。

以下の証明は長いので、プリントを配布して説明した方が望ましい。

(定理の証明)

(1) 標準形の線形計画問題

$$\begin{aligned} & \text{minimize: } \mathbf{c}^t \mathbf{x} \\ & \text{subject to: } A\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq 0 \end{aligned}$$

を考えよう。但し、

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

であり、 A はランク m を有する $m \times n$ 行列で

$$A = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n]$$

とする。 $\mathbf{x}$ を実行可能解の一つとすれば、 $\mathbf{x}$ は制約条件

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq 0$$

を満足する。この条件を書き直すと、

$$\mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 + \dots + \mathbf{a}_n x_n = \mathbf{b}, \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$$

が得られる。 $\mathbf{x}$ の成分中で正のものの個数を ℓ とし、簡単のため (変数の入れ替えを行うことで) $x_1, \dots, x_\ell$ が正であるとする。すると、

$$\mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 + \dots + \mathbf{a}_\ell x_\ell = \mathbf{b}, \quad x_1 > 0, x_2 > 0, \dots, x_\ell > 0$$

が得られる。ここで場合を分ける。

(a) $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_\ell$ が線形独立のとき

A は $m \times n$ 行列なので、 $\ell \leq m$ は明らか。もし $\ell = m$ ならば、 $\mathbf{x}$ は実行可能基底解である。なぜならば、 $x_{\ell+1} = x_{\ell+2} = \dots = x_n = 0$ とおけば、 $x_1, x_2, \dots, x_\ell$ は一意的に定まり、全て正の値を取るからである。

他方、もし $\ell < m$ ならば、行列 A の他の $n - \ell$ 列から適当に $m - \ell$ 列 $\mathbf{a}_{\ell+1}, \dots, \mathbf{a}_m$ を選んで (適当に列の入れ替えを含めて) $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_\ell, \mathbf{a}_{\ell+1}, \dots, \mathbf{a}_m$ が線形独立になるようにすれば、 $\ell = m$ の場合と同様にして、 $\mathbf{x}$ は $x_1, \dots, x_\ell, x_{\ell+1}(=0), \dots, x_m(=0)$ を基底変数とする実行可能基底解であることが分る。

(b) $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_\ell$ が線形従属のとき

全てが零でない実数 $y_1, y_2, \dots, y_\ell$ が存在して、

$$y_1 \mathbf{a}_1 + y_2 \mathbf{a}_2 + \dots + y_\ell \mathbf{a}_\ell = \mathbf{0} \quad (4)$$

が成り立つ。ここで、少なくとも一つの y_j が正であると仮定してよい。さて、

$$x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + \dots + x_\ell \mathbf{a}_\ell = \mathbf{b}$$

から、式 (4) の ϵ 倍を引くと

$$(x_1 - \epsilon y_1) \mathbf{a}_1 + (x_2 - \epsilon y_2) \mathbf{a}_2 + \dots + (x_\ell - \epsilon y_\ell) \mathbf{a}_\ell = \mathbf{b}$$

が得られる。ここで、 ϵ を零から増加させると

$$y_j \begin{cases} < 0 \\ = 0 \\ > 0 \end{cases} \longrightarrow x_j - \epsilon y_j \begin{cases} \text{増加} \\ \text{変化しない} \\ \text{減少} \end{cases}$$

となるので、 $|\epsilon|$ が小さければ、 $x_i > 0$ ($i = 1, 2, \dots, \ell$) なので、

$$\mathbf{x}' = (x_1 - \epsilon y_1, \dots, x_\ell - \epsilon y_\ell, 0, \dots, 0)^t$$

は実行可能解である。他方、ある j について $y_j > 0$ なので、 $x_j - \epsilon y_j$ は ϵ を大きくすると零になる。そこで、

$$\epsilon_o = \min_{j: y_j > 0} \frac{x_j}{y_j}$$

とすれば、

$$\mathbf{x}' = (\underbrace{x_1 - \epsilon_o y_1, x_2 - \epsilon_o y_2, \dots, x_\ell - \epsilon_o y_\ell}_{\text{少なくとも一つは零、他は全て正}}, 0, \dots, 0)$$

は実行可能解であり、高々 $\ell - 1$ 個の正の要素を持つ。従って、この操作を繰り返せば、正の要素の数を減らすことができ、最終的に線形独立な列を持つ実行可能解が得られ、(a) の場合に帰着される。

(2) $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)^t$ を最適解の一つとし、 $\hat{\mathbf{x}}$ の ℓ 個の正の成分 $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_\ell$ に対応する A の列を $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_\ell$ とすれば、 $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_\ell$ が線形独立の場合、(1) の (a) と同様に、 $\hat{\mathbf{x}}$ は実行可能基底解となっている。

他方、 $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_\ell$ が線形従属の場合、(1) の (b) の証明と同様に、新たな実行可能解

$$\hat{\mathbf{x}}' = \hat{\mathbf{x}} - \epsilon \mathbf{y} = (\underbrace{x_1 - \epsilon_o y_1, \dots, x_\ell - \epsilon_o y_\ell}_{\text{少なくとも一つは零}}, 0, \dots, 0)^t$$

が得られる。但し、

$$\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_\ell, 0, \dots, 0)$$

である。このとき、 $\hat{\mathbf{x}}'$ もまた最適解であることを示せば良い。

ϵ を変数とし、 $|\epsilon|$ が十分小さければ、 $\bar{x} = \hat{x} - \epsilon y$ は常に実行可能解であり、 $\bar{x}$ に対する目的関数の値は、

$$c^t \bar{x} = c^t \hat{x} - \epsilon c^t y$$

となる。ここで、 $\hat{x}$ は最適解なので、 $\epsilon c^t y \leq 0$ でなければならない。更に、 ϵ は正でも負でもよいので、 $c^t y = 0$ でなければならず、 $c^t \bar{x} = c^t \hat{x}$ となる。ここで、 $\epsilon = \epsilon_o$ とおけば、実行可能基底解 $\hat{x}'$ が最適解であることが分かる。 Q.E.D.