

2 線形計画法とは

[学習内容]

- 線形計画問題の標準形と、与えられた線形計画問題を標準形に直す方法
- 図を用いた線形計画問題の解法
- 実行可能解と基底解

2.1 標準形

標準形の線形計画問題とは、線形の目的関数

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

を線形の等式制約条件

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

とすべての変数に対する非負条件

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n$$

のもとで最小にする解を求める問題である。但し、 a_{ij}, b_j, c_j は定数である。

標準形の問題は、ベクトル $\mathbf{x}, \mathbf{b}$, 行列 A を

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

とすれば、

$$\begin{aligned} \text{minimize:} \quad & \mathbf{c}^t \mathbf{x} \\ \text{subject to:} \quad & A\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq 0 \end{aligned}$$

によって行列表示される。

[与えられた線形計画問題を標準形に直す方法]

1. 最大化問題の場合

目的関数に (-1) を乗じて最小化問題にする。

2. 制約条件が不等式を含む場合

例えば、 $x_1 + x_2 \leq 30$ に対しては、新たな変数 $x_3 = 30 - x_1 - x_2$ を導入すれば、不等式制約

$$x_1 + x_2 \leq 30$$

は、等式制約

$$x_1 + x_2 + x_3 = 30, \quad x_3 \geq 0$$

と等価であり、制約条件を全て等式にすることができる。ここで、不等式を等式に変える為に導入した変数 x_3 を「スラック変数」という。

3. 自由変数を含む場合

非負条件のない変数 x_k は、2つの非負の変数の差で置き換える。すなわち、 x_k を

$$x_k = x_k^+ - x_k^-, \quad x_k^+ \geq 0, \quad x_k^- \geq 0$$

で置き換えれば良い。

[例 2.1]

$$\begin{aligned} \text{maximize:} \quad & 70x_1 + 120x_2 + 30x_3 \\ \text{subject to:} \quad & 5x_1 + 6x_3 \leq 80 \\ & 2x_2 + 8x_3 \leq 50 \\ & 7x_1 + 15x_3 \geq 100 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

を標準形に直すと

$$\begin{aligned} \text{minimize:} \quad & -70x_1 - 120x_2 - 30x_3 \\ \text{subject to:} \quad & 5x_1 + 6x_3 + x_4 = 80 \\ & 2x_2 + 8x_3 + x_5 = 50 \\ & 7x_1 + 15x_3 - x_6 = 100 \\ & x_1, x_2, \dots, x_6 \geq 0 \end{aligned}$$

となる。

[例 2.2]

$$\begin{aligned} \text{maximize:} \quad & 2x_1 + 4x_2 \\ \text{subject to:} \quad & x_1 + x_2 \geq 3 \\ & 3x_1 + 2x_2 = 14 \end{aligned}$$

$$x_1 \geq 0$$

を標準形に直すと

$$\begin{array}{llllll} \text{minimize:} & -2x_1 & -x_2^+ & +4x_2^- & & \\ \text{subject to:} & x_1 & +x_2^+ & -x_2^- & -x_3 & = 3 \\ & 3x_1 & +2x_2^+ & -2x_2^- & & = 14 \end{array}$$

$$x_1, x_2^+, x_2^-, x_3 \geq 0$$

となる。

2.2 目的関数が絶対値を含む場合

ある変数 x_k の絶対値 $|x_k|$ は、 $-z_k \leq x_k \leq z_k$ を満足する最小の非負の数 z_k に一致する。すなわち、目的関数中の $|x_k|$ を z_k に置き換えて、新たな2つの制約条件

$$x_k \leq z_k \quad \text{および} \quad -z_k \leq x_k$$

を追加すれば良い。一般に、目的関数中の $|x_k - u|$ など同様に、置き換えることができる。

[例 2.3]

$$\begin{array}{llll} \text{minimize:} & 2|x_1| & +x_2 & \\ \text{subject to:} & x_1 & +x_2 & \geq 4 \\ & x_2 & \geq 0 & \end{array}$$

を線形計画問題に直すと

$$\begin{array}{llll} \text{minimize:} & 2z_1 & +x_2 & \\ \text{subject to:} & x_1 & +x_2 & \geq 4 \\ & x_1 & & -z_1 \leq 0 \\ & -x_1 & & -z_1 \leq 0 \\ & x_2, z_1 & \geq 0 & \end{array}$$

となる。

2.3 図による線形計画問題の解き方

[例 2.4]

$$\begin{array}{llll} \text{maximize:} & x_1 & +2x_2 & \\ \text{subject to:} & x_1 & +x_2 & \leq 4 \\ & -x_1 & +x_2 & \leq 2 \end{array}$$

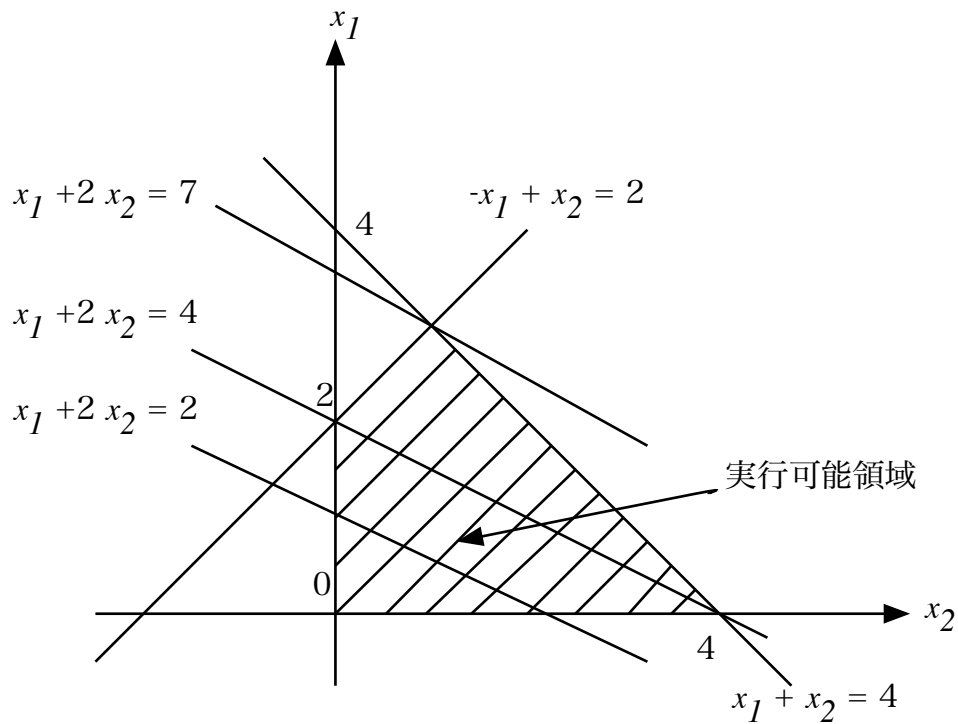


図 4: 実行可能領域の例

$$x_1, x_2 \geq 0$$

制約条件をみたす (x_1, x_2) の領域（実行可能領域）を図示すると図のようになる。

実行可能領域に含まれる点を「実行可能解」と呼ぶ。ここで、 $x_1 + 2x_2 = k$ のグラフを描くと、図のようになりこのグラフが実行可能領域と交わりを有する最大の k は 7 であることが分る。また、この最大値を与える実行可能解は $(x_1, x_2) = (1, 3)$ であり、これを最適解という。一般に、最適解は実行可能領域の端点である。次に、同じ問題を標準形に直すと、スラック変数 x_3, x_4 を導入して

$$\begin{array}{llllll} \text{maximize:} & x_1 & +2x_2 & & & \\ \text{subject to:} & x_1 & +x_2 & +x_3 & & = 4 \\ & -x_1 & +x_2 & & +x_4 & = 2 \end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

このとき、実行可能領域の頂点と (x_1, x_2, x_3, x_4) との関係は図 5 のようになり、端点は 4 変数のうち 2 変数が零となるベクトルに対応している。2 変数が 0 となるベクトルは $\binom{4}{2} = 6$ 通りあり、残りの 2 つのベクトルは $(0, 4, 0, -2)$, $(-2, 0, 6, 0)$ であり、これらは実行可能領域にはない。

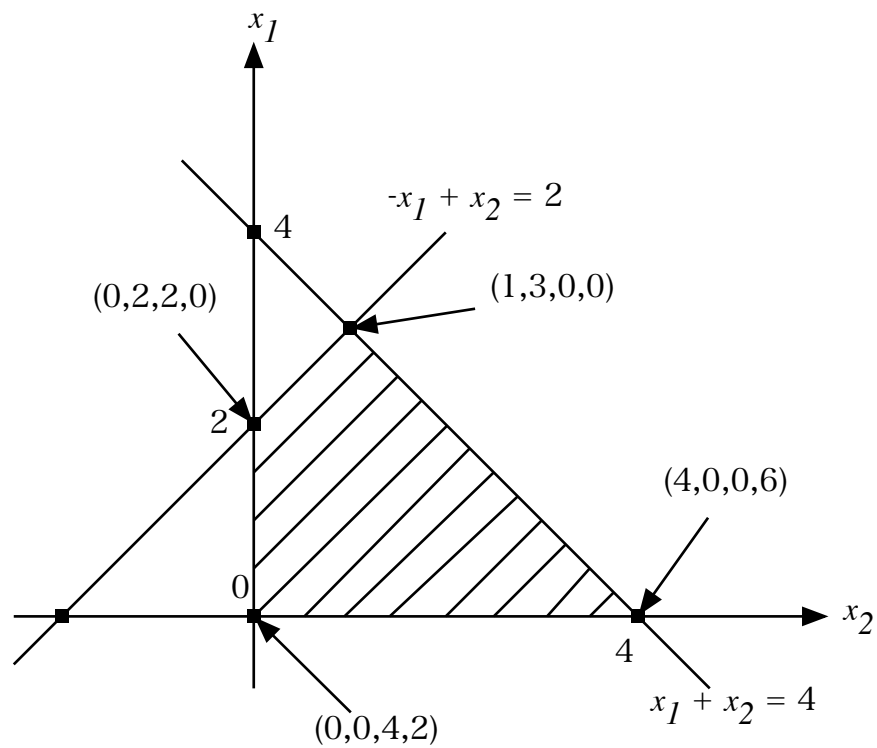


図 5: 実行可能領域の頂点

一般の場合

$$\begin{array}{ll} \text{minimize:} & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{subject to:} & A\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq 0 \end{array}$$

を考える。変数は n 個とし、 A は $m \times n$ 行列行列 A のランクは m とする。このとき、任意に $n - m$ 個の変数（非基底変数と呼ぶ） $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{n-m}}$ を零とすれば、他の m 変数は（基底変数と呼ぶ）は $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ から決定できる。そのようにして得られる $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ を基底解と呼び、 $\mathbf{x} \geq 0$ をみたす基底解を実行可能基底解と呼ぶ。先の例では、 $n = 4, m = 2$ であったことに注意する。