

数理計画法 (E)

担当 植松友彦 教授

平成 18 年 3 月 30 日

学習内容: 複数のパラメータを有するシステムにおいて、パラメータによって定まる値を最適 (最大、最小) にしたいとき、パラメータの値を決定する方法について学ぶ。

教科書: 特に指定しない。板書中心。

参考書: 数理計画法、線形計画法、非線形計画法などのタイトルのついた本を見よ。図書館に沢山ある。洋書では、MIT の教科書である

D. Bertsimas and J. N. Tsitsiklis, *Introduction to Linear Optimization*, Athena Scientific, 1997.

を推薦する。

成績評価: 期末テストによって行う。学習内容の定着の為に小テスト (1 回 30 分程度) を数回行う。

1 数理計画法とは

1.1 システムの最適化の手法

システムの最適化やある問題の最適解を求めるには次の手段を用いる。

Step.1 問題を数学モデルで定式化する。

Step.2 数学モデルの最適解を求める。

今日は、Step.1 について説明し、次回からは Step.2 について述べる。しかし、数理計画法を実際に用いるに当たって、本当に重要なのは Step.1 であることを念頭に置いておいて欲しい。同じ問題でも、定式化が悪ければ最適解を求めるのにスーパーコンピュータが必要になるかも知れないが、優れた定式化を行えば PC でも解けるかも知れない。これについては、後日、機会があれば話したい。

1.2 線形計画問題

[例題 1] 4 種の原料 A,B,C,D を用いて 3 種の製品 I, II, III を生産している工場が最大の利益を上げるには、どのような生産計画をたてれば良いか。

(a) 利益			(b) 原料の必要量				(c) 使用可能量	
I	II	III	原料	I	II	III	原料 A	80
70	120	30	A	5	0	6	原料 B	50
			B	0	2	8	原料 C	100
			C	7	0	15	原料 D	70
			D	3	11	0		

数学モデル化：製品 I,II III の生産量を x_1, x_2, x_3 とすれば、総利益は、

$$70x_1 + 120x_2 + 30x_3 \quad (1)$$

と書ける。これを最大にするような x_1, x_2, x_3 を求めれば良い。このとき、 x_1, x_2, x_3 を決定変数という。しかしながら、各原料には使用可能量の限界があり、

$$\left. \begin{array}{l} \text{原料 A: } 5x_1 + 6x_3 \leq 80 \\ \text{原料 B: } 2x_2 + 8x_3 \leq 50 \\ \text{原料 C: } 7x_1 + 15x_3 \leq 100 \\ \text{原料 D: } 3x_1 + 11x_2 \leq 70 \end{array} \right\} \quad (2)$$

を満たさなければならない。他方、生産量は非負なので、

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \quad (3)$$

である。従って、この問題は、式(2)と式(3)を満足し、式(1)を最大化する (x_1, x_2, x_3) を求める問題として定式化される。

一般に、最大化（あるいは最小化）したい関数を「目的関数」という。また決定変数の満足すべき条件を「制約条件」という。

数理計画法の分類			
	線形計画問題	2 次計画問題	非線形計画問題
目的関数	(変数の) 1 次式	2 次式	任意の非線形関数
制約条件	全て 1 次式	全て 1 次式	任意の関数

1.3 ネットワーク計画問題

有効グラフで枝や節点に値があるものを「ネットワーク」と呼ぶ。

[例題 2] 枝の値が距離を表すとき、都市 A から G まで、どの経路を通ったら最短で行くことができるか。

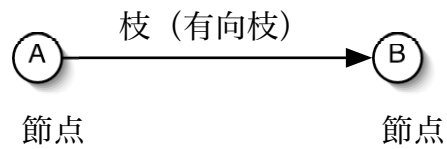


図 1: グラフ

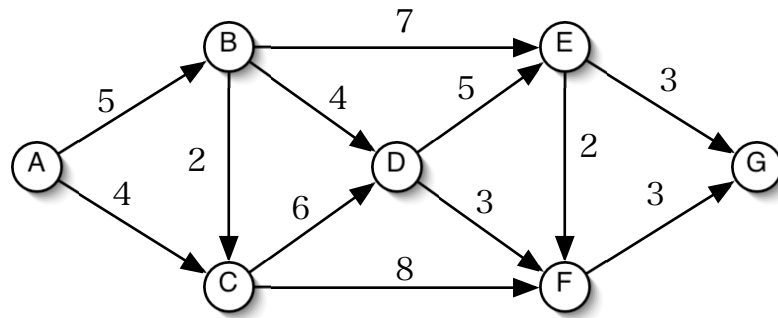


図 2: 最短経路問題

経路：ある節点から他の節点に至る閉路を含まない道順。経路の長さは、経路に含まれる枝の値の総和に等しい。

この問題は、節点 A から節点 G への経路（パス）の中で最小の長さを有する経路を探す問題であり、最短経路問題と呼ばれる。

[例題 3] 図のような 6 つの都市を結んで宅配便を営んでいる Y 運輸がある。図のネットワークの枝に書かれた数値は、1 日の輸送量の上限值（個数）である。A 市から F 市までに 1 日に運べる品物の最大量はいくらか。

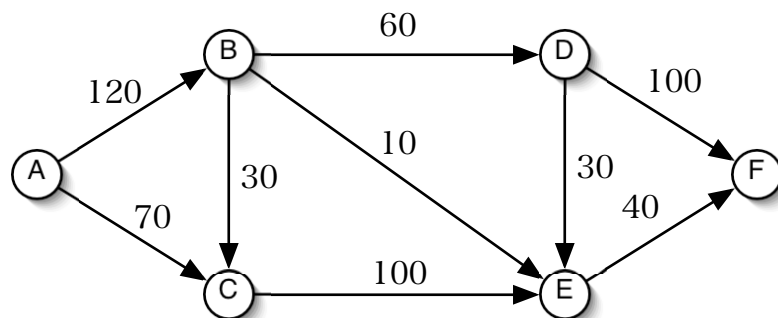


図 3: 最大フロー問題

この問題のように、枝に容量が与えられているネットワークにおいて、ある節

点から他の節点に流すことのできる物流（フロー）の最大値を求める問題を最大流問題あるいは最大フロー（maximum flow）問題という。

他方、枝に容量制限の他に、単位輸送量あたりのコストが与えられており、定められた量のある節点から他の節点に最小のコストで輸送する方法を求める問題を最小費用流（mimimum cost flow）問題という。

一般に、ネットワーク計画問題は、線形計画問題として定式化できるが、それぞれの問題に特化した、より効率的な解法が開発されている。

1.4 組合わせ最適化問題

[例題 4] 高さが 1, 3, 7, 12, 25 の 5 個の積み木がある。この積み木を高さ 35 になるように積み上げるには、どの積み木を選べば良いか。（ナップザック問題）

この問題は、一般に次のように定式化される。 n 個の積み木の高さを $a_1, a_2, \dots, a_n$ とし、積み上げる高さを b とすれば、

$$\begin{aligned} \text{目的関数} &: \sum_{i=1}^n a_i x_i \quad (\text{なくてもよい}) \\ \text{制約条件} &: \sum_{i=1}^n a_i x_i = b \\ &0 \leq x_i \leq 1, \quad x_i (i = 1, 2, \dots, n) \text{ は整数} \end{aligned}$$

となる。このように変数が整数値しか取り得ない線形計画問題を整数計画問題という。

また、このように変数の取り得る値が有限個である場合、最適解は有限個の値の組合わせの中の一つであるので、このような問題を「組合わせ最適化問題」ともいう。

次回からは、これらの数理計画法の最も基本となる線形計画法について述べる。