数理論理学 (第8回)

2005.11.8

府川　和彦

1．5　完全性

ここでは $\models$ と $\vdash$ が等価であること, 即ち<u>完全性</u>を証明する.

例えば, トートロジーと定理は等価になる.

$$\models \varphi \Leftrightarrow \ \vdash \varphi$$

トートロジー　　定理

$\Gamma \models \varphi$ **の定義（復習）**

$v(\psi)=1 \quad \forall \psi \in \Gamma$ **となる付値** v **が存在するならば**

$$v(\varphi)=1$$

がこの全ての付値 v **に対して成立する.**

例 $\Gamma = \{\psi_1, \quad \psi_2\}$

ψ_1	ψ_2	φ
1	1	1
1	0	*
0	1	*
0	0	*

$\Rightarrow$ $\Gamma \models \varphi$

$v(\psi_1) = v(\psi_2) = 1$

となる付値が存在しない場合は
必ず $\Gamma \models \varphi$

＊：0または1

<u>定理1．5．1 （健全性）</u> $\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \models \varphi$

証明の方針： $\Gamma \vdash \varphi$ **であるから，以下の導出** D **が存在する．**

- $\{D$ **の消されずに残った仮定の集合**$\} \subseteq \Gamma$
- **結論が** φ

D **に対して<u>構造的帰納法</u>を適用する．**

定理1．5．1の証明　(導出の帰納的定義1．4．1に沿って証明)

(1) φ という導出 (結論も仮定もφ) を考える．

明らかに φ ∈ Γ である．従って

$$\{\varphi, \Lambda\} \vdash \varphi$$

このとき，$v(\varphi) = \cdot\cdot = 1$ を満足する付値 v が存在するならば，
この全ての付値 v に対して，$v(\varphi) = 1$である．従って

$$\Gamma \models \varphi$$

(2) (∧の場合)

(2-1) (∧I)

$$\begin{array}{c} D \\ \varphi \end{array} \quad , \quad \begin{array}{c} D' \\ \varphi' \end{array}$$

という導出において，{D の消されずに残った仮定の集合} ⊆ Γ，
{D' の消されずに残った仮定の集合} ⊆ Γ' として，

$\Gamma \models \varphi \qquad \Gamma' \models \varphi'$ が成立すると仮定する（帰納法の仮定）.

このとき

$$\dfrac{\begin{matrix} D & D' \\ \varphi & \varphi' \end{matrix}}{\varphi \wedge \varphi'} \wedge I$$

という導出が存在する. {消されずに残った仮定の集合}⊆ Γ ’’とすると, この導出は

$$\Gamma'' \vdash \varphi \wedge \varphi' \qquad (*1)$$

と表すことができる.

{D の消されずに残った仮定の集合}⊆ Γ ’’ ,

{D’ の消されずに残った仮定の集合} ⊆ Γ ’’ であるから

$$\Gamma'' \models \varphi \qquad \Gamma'' \models \varphi'$$

である. 従って, $v(\psi)=1 \quad \forall \psi \in \Gamma''$となる v が存在するなら

$$v(\varphi)=v(\varphi')=1$$

となり，

$$v(\varphi \wedge \varphi') = 1$$

がこの全ての付値 v に対して成立する．即ち，(*1) のとき

$$\Gamma'' \models \varphi \wedge \varphi'$$

が成立する．

(2-2) ($\wedge E$) $\begin{array}{c} D \\ \varphi \wedge \psi \end{array}$ という導出において，$\{D$ の消されずに残った仮定の集合$\} \subseteq \Gamma$ として，

$$\Gamma \models \varphi \wedge \psi$$

が成立すると仮定する（帰納法の仮定）．このとき

$$\dfrac{\begin{array}{c} D \\ \varphi \wedge \psi \end{array}}{\varphi} \wedge E$$

という導出が存在する．この導出は

$$\Gamma \vdash \varphi \qquad (*2)$$

と表すことができる．

$\Gamma \models \varphi \wedge \psi$ から $v(\sigma)=1 \quad \forall \sigma \in \Gamma$ となる v が存在するなら

$$v(\varphi \wedge \psi)=1$$

がこの全ての付値 v に対して成り立つ．このとき

$$v(\varphi)=1$$

が成立する．即ち，(*2) のとき

$$\Gamma \models \varphi$$

が成立する．

$$\begin{array}{c} D \\ \dfrac{\varphi \wedge \psi}{\psi} \wedge E \end{array}$$

についても同様に証明できる．

(3) (→の場合)

(3-1) (→I)

$$\begin{array}{c}\varphi\\ D\\ \psi\end{array}$$

という導出 (D1) において，{消されずに残った仮定の集合} ⊆ Γ として，

$$\Gamma \models \psi$$

が成立すると仮定する（帰納法の仮定）.

このとき

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]\\ D\\ \psi\end{array}}{\varphi \to \psi}\ \to I$$

という導出が存在する. この導出は {消されずに残った仮定の集合} ⊆ Γ' として,

$$\Gamma' \vdash \varphi \to \psi \qquad (*3)$$

と表すことができる.

{導出 (D1) の消されずに残った仮定の集合} ⊆ Γ'∪{φ}
であるから

$$\Gamma' \cup \{\varphi\} \models \psi$$

が成立する．従って，$v(\varphi)=1, \quad v(\sigma)=1 \quad \forall \sigma \in \Gamma'$

となる付値 v が存在するならば

$$v(\psi)=1$$

がこの全ての付値 v に対して成り立つ．このとき

$$v(\varphi \to \psi)=1$$

が成立する．また，$v'(\varphi)=0, \quad v'(\sigma)=1 \quad \forall \sigma \in \Gamma'$

となる付値 v' が存在するならば

$$v'(\varphi \to \psi)=1$$

がこの全ての付値 v' に対して成立する．

従って，$v(\sigma)=1 \quad \forall\sigma\in\Gamma'$ となるv が存在するなら

$$v(\varphi\to\psi)=1$$

がこの全ての付値 v に対して成立する．即ち，(*3) のとき

$$\Gamma'\models\varphi\to\psi$$

が成立する．

(3-2) (→E)

$$\begin{array}{ccc} D & & D' \\ \varphi & , & \varphi\to\psi \end{array}$$

という導出において，
{D の消されずに残った仮定の集合}
⊆ Γ，
{D' の消されずに残った仮定の集合}
⊆ Γ' として，

$$\Gamma\models\varphi$$

$$\Gamma'\models\varphi\to\psi$$

が成立すると仮定する（帰納法の仮定）．

$$\dfrac{\begin{array}{cc} D & D' \\ \varphi & \varphi \to \psi \end{array}}{\psi} \to E$$

という導出が存在する．この導出は{消されずに残った仮定の集合} ⊆ Γ’’として，

$$\Gamma'' \vdash \psi$$

と表すことができる．

$\Gamma'' \models \psi$ の証明は<u>演習問題</u>

(4) (⊥の場合)

(4-1) (⊥)

$$\begin{array}{c} D \\ \bot \end{array}$$

という導出 において，{消されずに残った仮定の集合} ⊆Γ として，

$$\Gamma \models \bot$$

が成立すると仮定する（帰納法の仮定）．

このとき

$$\dfrac{\begin{array}{c} D \\ \perp \end{array}}{\varphi}\,\perp$$

という導出が存在する．この導出は，

$$\Gamma \vdash \varphi \qquad (*4)$$

と表すことができる．

$v(\psi)=1 \quad \forall \psi \in \Gamma$ となる付値 v が存在すると仮定する．

$\Gamma \models \perp$ から $v(\perp)=1$ となり $v(\perp)=0$ に反する．

従って，背理法から

$v(\psi)=1 \quad \forall \psi \in \Gamma$ となる付値 v が存在しない．(*5)

次に，$\Gamma \not\models \varphi$ と仮定する．

$v(\varphi)=0 \quad v(\psi)=1 \quad \forall\psi\in\Gamma$ となる付値 v が存在する．

しかし，$v(\psi)=1 \quad \forall\psi\in\Gamma$ となる付値 v が存在しないので

矛盾である．

従って，背理法から $\Gamma\models\varphi$

結局，(*4) のとき $\Gamma\models\varphi$ が成立する．

(4-2) (RAA)

$$\begin{array}{c} \neg\varphi \\ D \\ \perp \end{array}$$

という導出 において，

$\{$消されずに残った仮定の集合$\}\subseteq\Gamma$ として，

$$\Gamma\models\perp$$

が成立すると仮定する（帰納法の仮定）．

このとき

$$\begin{array}{l} [\neg\varphi] \\ \quad D \\ \quad \perp \\ \hline \quad \varphi \end{array}\ \text{RAA}$$

という導出が存在する．この導出は {消されずに残った仮定の集合} ⊆ Γ’ として，

$$\Gamma' \vdash \varphi \qquad (*6)$$

と表すことができる．

$$\begin{array}{l} \neg\varphi \\ \quad D \\ \quad \perp \end{array}$$

という導出 の {消されずに残った仮定の集合}
={D の消されずに残った仮定の集合} ∪{ ¬ φ}
⊆ Γ’ ∪{ ¬ φ}

従って　$\Gamma' \cup \{\neg\varphi\} \vdash \perp$　であり，

$\Gamma' \cup \{\neg\varphi\} \models \perp$　と仮定する（帰納法の仮定）．

$v(\psi)=1 \quad \forall\psi \in \Gamma'$　となる付値 v が存在するとする．

$v(\neg\varphi)=1$ とすると $\Gamma'\cup\{\neg\varphi\}\models\bot$ に反する. 従って

$$v(\neg\varphi)=0$$

$$v(\varphi)=1$$

結局, (*6) のとき

$$\Gamma'\models\varphi$$

が成立する.

<u>**証明終**</u>

(注意)

$\Gamma\vdash\varphi \Rightarrow \Gamma\models\varphi$ の対偶は $\Gamma\not\models\varphi \Rightarrow \Gamma\nvdash\varphi$

よって, Γが空集合の場合について考えると, トートロジーでないことを示せば, 定理でないことを証明できる.

<u>定義1．5．2</u> Γ を命題論理式の集合とする．

$\Gamma \vdash \perp$ のとき Γ は<u>矛盾している</u>という．

$\Gamma \nvdash \perp$ のとき Γ は<u>無矛盾</u>という．

補題1．5．3 以下の3条件は等価である．

1. Γ は無矛盾である．
2. $\Gamma \vdash \varphi$ かつ $\Gamma \vdash \neg\varphi$ となる φ は存在しない．
3. $\Gamma \nvdash \varphi$ となる φ が少なくとも一つ存在する．

(補題1．5．3の証明) 以下の3条件が等価であることを示す．

4．Γ は矛盾している．
5．$\Gamma \vdash \varphi$ かつ $\Gamma \vdash \neg\varphi$ となる φ が存在する．
6．全ての φ に対して $\Gamma \vdash \varphi$

(4) → (6) の証明

$\Gamma \vdash \perp$ だから

$\begin{matrix} D \\ \perp \end{matrix}$ という導出 が，$\{$消されずに残った仮定の集合$\} \subseteq \Gamma$ として存在する．

従って，任意の命題 φ で $\dfrac{\begin{matrix} D \\ \perp \end{matrix}}{\varphi} \perp$ という導出が存在する．

即ち任意の命題 φ で $\Gamma \vdash \varphi$

(6) → (5) の証明

自明

(5) → (4) の証明

$$\begin{array}{c} D \\ \\ \varphi \end{array}\quad , \quad \begin{array}{c} D' \\ \\ \neg\varphi \end{array}$$

という導出が
$\{D$ の消されずに残った仮定の集合$\} \subseteq \Gamma$,
$\{D'$ の消されずに残った仮定の集合$\} \subseteq \Gamma$として存在する.

従って，
$$\dfrac{\begin{array}{cc} D & D' \\ \\ \varphi & \neg\varphi \end{array}}{\perp}\ \to E$$
という導出が存在し，$\Gamma \vdash \perp$

証明終

補題1.5.4　$v(\psi)=1 \quad \forall\psi\in\Gamma$ となる付値 v が存在するとき, Γ は無矛盾である.

補題1.5.4の証明（背理法による証明）

Γ は矛盾していると仮定する.

$$\Gamma\vdash\perp$$

定理1.5.1（健全性）から

$$\Gamma\models\perp$$

$v(\psi)=1 \quad \forall\psi\in\Gamma$ となる付値 v が存在するので

$$v(\perp)=1$$

となる. これは $v(\perp)=0$ と反するので矛盾である. 従って, Γ は無矛盾である.

具体例　$\{p_0 \quad \neg p_1 \quad p_1 \to p_2\}$ **は無矛盾**

$v(p_0)=1 \quad v(p_1)=0$ **という付値** v **をとれば**

$v(p_0)=v(\neg p_1)=v(p_1 \to p_2)=1$

<u>補題1．5．5</u>

(a)　$\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ **が矛盾していれば，**　$\Gamma \vdash \varphi$

(b)　$\Gamma \cup \{\varphi\}$ **が矛盾していれば，**　$\Gamma \vdash \neg\varphi$

<u>補題1．5．5の証明</u>

(a) **の仮定から**

$$\begin{array}{c} \neg\varphi \\ D \\ \bot \end{array}$$

という導出 が存在し，

$\{D$ **の消されずに残った仮定の集合**$\} \subseteq \Gamma$

である．

このとき

$$\begin{array}{c}[\neg\varphi] \\ D \\ \dfrac{\perp}{\varphi}\ \mathrm{RAA}\end{array}$$

という導出が存在する. この導出は

$$\Gamma \vdash \varphi$$

である.

(b) の仮定から

$$\begin{array}{c}\varphi \\ D \\ \perp\end{array}$$

という導出 が存在し,
$\{D$ の消されずに残った仮定の集合$\} \subseteq \Gamma$
である.

$$\begin{array}{c}[\varphi] \\ D \\ \dfrac{\perp}{\neg\varphi}\ \to I\end{array}$$

このとき
という導出が存在する. ($\varphi\to\perp = \neg\varphi$ に注意)
この導出は

$$\Gamma \vdash \neg\varphi$$

である.

演習問題 8

(8-1) $\begin{array}{c} D \\ \\ \varphi \end{array}$, $\begin{array}{c} D' \\ \\ \varphi \to \psi \end{array}$ という導出において，
$\{D$ の消されずに残った仮定の集合$\}$ ⊆ Γ ,
$\{D'$ の消されずに残った仮定の集合$\}$ ⊆ Γ'
を満足し，

$\Gamma \models \varphi$ かつ $\Gamma' \models \varphi \to \psi$ が成立すると仮定する．

このとき
$$\dfrac{\begin{array}{cc} D & D' \\ \\ \varphi & \varphi \to \psi \end{array}}{\psi} \to E$$

という導出が存在して，$\{$消されずに残った仮定の集合$\}$
⊆ Γ'' とすると

$$\Gamma'' \models \psi$$

となることを証明せよ．

中間試験

日時：11月29日　3･4時限

範囲：11月22日の講義まで

持ち込み不可