イノベーションマネジメント研究科
技術経営専攻

金融リスク・マネジメント

第１１講：信用リスク（5）

東京工業大学イノベーションマネジメント研究科
中川　秀敏
E-mail: nakagawa@mot.titech.ac.jp
Office Hour : 17:00-18:30, every Tuesday, at W9-105

※講義資料は、講義前日の午後5時までにはアップするので事前に
http://www.craft.titech.ac.jp/~nakagawa/dir2/lecture.html#TIT2005_1
から各自でダウンロードして用意すること。

Agenda

- プライシング
  - 基本的なアイデアとその問題点
  - リスク中立なデフォルト確率
- 発展的な信用リスク・モデル
  - オプション評価型モデル
  - 社債スプレッド
  - 格付推移行列

基本的なアイデア

- デフォルト可能性のない貸出
  - 1年無リスク金利（借入・貸出ともに） r とする
    （以後、この設定を引き継いでいく）
  - 1年後に確実に元本+利息(金利 R)が返済されるとすれば、R＝r であるはず→裁定機会の存在

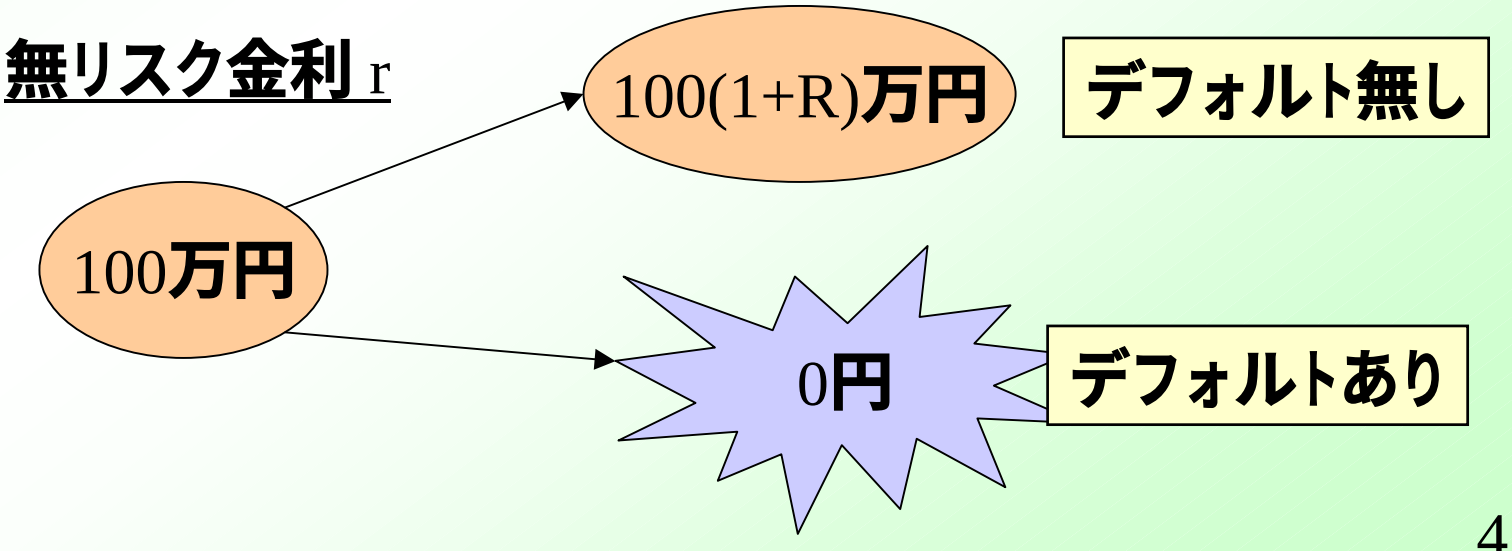
<u>無リスク金利 r</u>

100万円 → 100(1+R)万円

$R = r$ となる

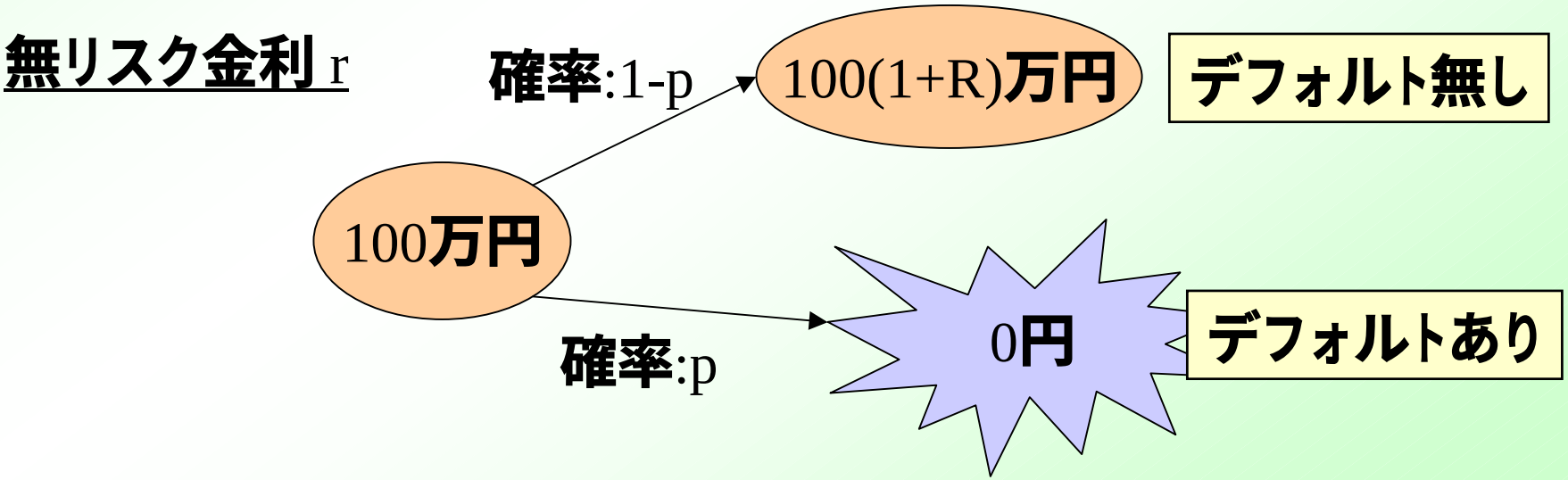
基本的なアイデア

- デフォルト可能性のある貸出
  - 1年後までにデフォルトしなければ、1年後に元本+利息(金利 R)が返済されるが、1年以内にデフォルトすれば全く返済されないという状況で、この貸出金利R をどのように決めればよいか？



基本的なアイデア

- デフォルト可能性のある貸出
  - デフォルト確率を p とする
  - 将来の収入は不確実であるので、その期待値を考えると、少なくとも R > r でないと割に合わないことは明らか



基本的なアイデア

- デフォルト可能性のある貸出
  - 将来の収入の現在価値の期待値が貸出額に等しくなるべきと考えると・・・
    (とりあえず元本を100とするが、いくらでもよい)

$$\frac{100(1+R)}{1+r}\times(1-p)+\frac{0}{1+r}\times p=100$$

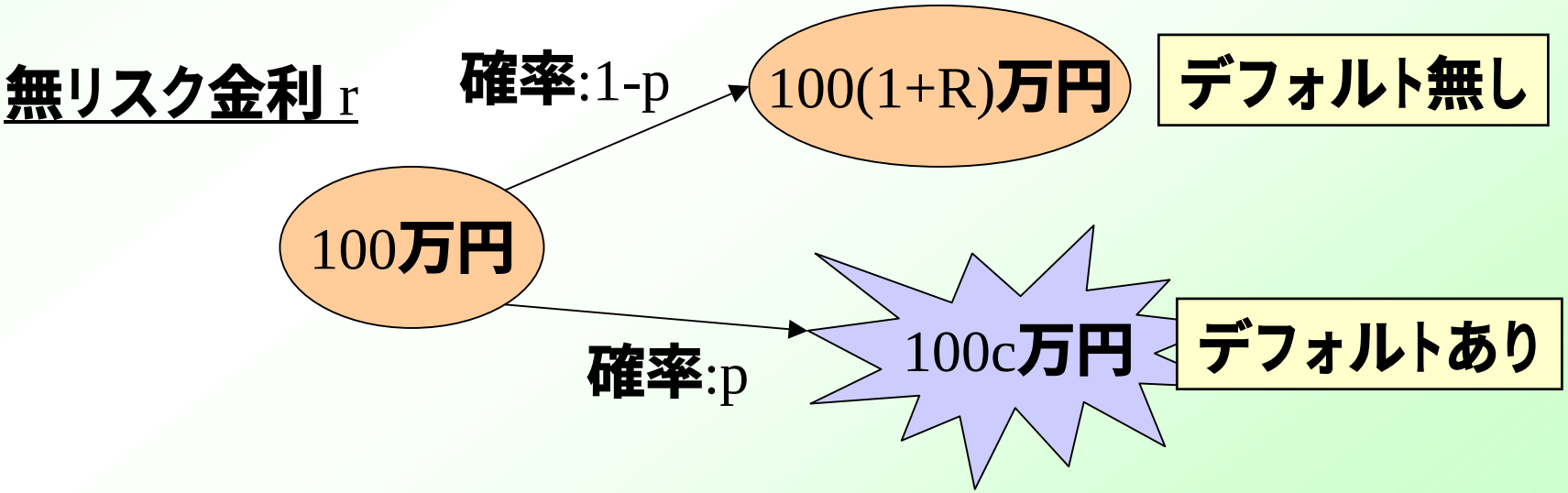
  - R について式を解くと・・・

$$R=\frac{1+r}{1-p}-1=\frac{r+p}{1-p}=r+\frac{p(1+r)}{1-p}$$

基本的なアイデア

- デフォルト可能性のある貸出
  - デフォルトしても（1年後に）元本のうち、回収率 c (0≦c≦1)だけ回収できる場合

$$\frac{100(1+R)}{1+r}\times(1-p)+\frac{100c}{1+r}\times p=100\text{（万円）}$$



基本的なアイデア

- デフォルト可能性のある貸出
  - R について解くと

$$R = \frac{r + p(1-c)}{1-p} = r + \frac{p(1+r-c)}{1-p}$$

  - これは次のように期待リターンの関係式と見ることもできる

$$R(1-p) + (c-1)p = r$$

  - しかし、このように
    「現在の貸出額」＝「返済額の現在価値の期待値」
    という考え方でよいのか？

基本的なアイデアの問題点

- デフォルト可能性のある貸出
  - リスク回避的な立場に立てば、デフォルト・リスクがある分、本来は追加的なリターンを「リスクに対するプレミアム」として要求するのが自然

$$R(1-p)+(c-1)p>r$$

  - 「リスク1単位あたりの価格」λ(>0)と「リスク（リターンの標準偏差）」σを用いて、次のように考えることができる

$$R(1-p)+(c-1)p=r+\lambda\sigma$$

  - λはどのように与える？

（※）$\sigma^2=p(1-p)(1+R-c)^2$

基本的なアイデアの問題点

- 回収率の議論
  - 回収率のモデルは定着していない
  - 担保の有無、返済の優先順位等で異なる
  - 回収率を分析するためのデータが不足

リスク中立デフォルト確率

- リスク中立デフォルト確率
  - 仮に同程度のデフォルト・リスクの企業に対する貸出金利が $\tilde{R}$ と市場で観測されているとする
  - このとき、以下の式を満たす確率 p^* をリスク中立なデフォルト確率と呼ぶ

$$\tilde{R}(1-p^*)+(c-1)p^*=r$$

  - 前ページのλとの関係は以下のようになる。

$$p^*=p-\frac{\lambda\sigma}{1+R-c}$$

リスク中立デフォルト確率

- リスク中立デフォルト確率
  - リスク中立デフォルト確率の下では、「現在の貸出額」＝「返済額の現在価値の期待値」が成り立つ
  - ただし、この考え方が使えるためには、デフォルト・リスクを取り引きする市場が整備されている必要がある

発展的な信用リスク・モデル

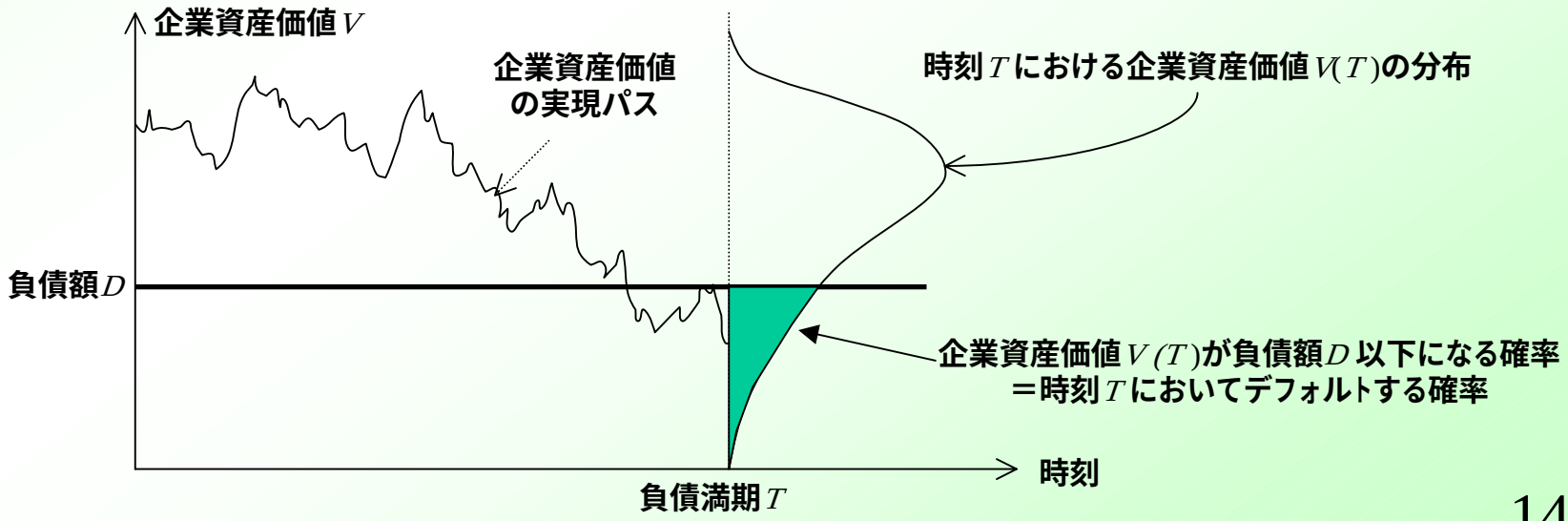
- オプション評価型モデル
- 社債スプレッド
- 格付推移行列

オプション評価型モデル

- □ Merton(1974)が基本的なアイデアを提示
- □ バランスシートにおいて、将来の企業資産価値V_Tが負債額Dを下回る（自己資本が負になる）ことをデフォルトと定義する。

  → 株式価値E＝「企業資産価値Vを原資産、負債額Dを権利行使価格とする、ヨーロピアン・コールオプション」とみなす。

- □ 現在の株価にフィットするようにモデル・パラメータを推定し、デフォルト確率を求める。



KMVモデル

- 商業化されたモデル。枠組みはマートン・モデルとほぼ同じ
  (もちろん実際は複雑なモデルである。デフォルト確率の算出方法は実証結果に依存した独自の方法を用いている)
  - 企業資産の市場価値　＝　株価の時価総額＋負債総額
  - デフォルト・ポイント＝短期債務＋長期債務÷2
  - 資産変動率 (企業価値の変化の標準偏差：ボラティリティ)

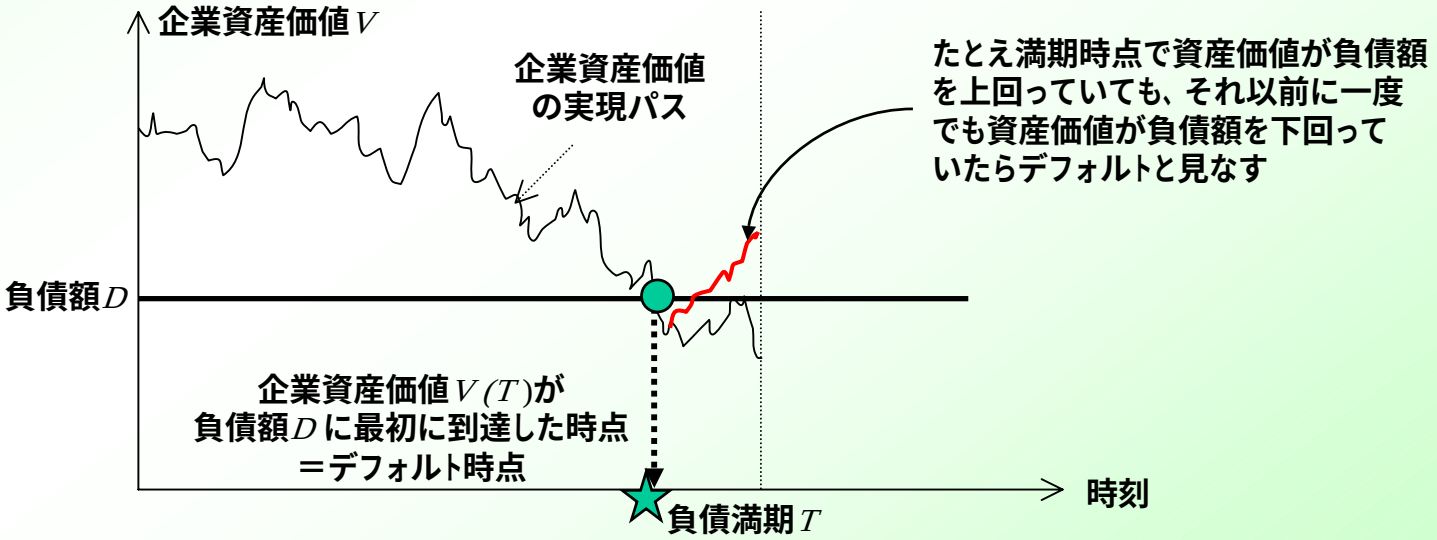
- デフォルト距離(DD)・・・リスクあたりで見たデフォルト・ポイントまでの近さ

$$DD = \frac{\text{将来の資産価値平均} - \text{デフォルトポイント}}{\text{将来の資産価値平均} \times \text{資産変動率}}$$

- EDF(Expected Default Frequency)について
  - デフォルト危険度を0.02%から20%まで2,000段階の確率で表示するKMV独自のリスク尺度
  - DDをKMV独自のノウハウによって、EDFに変換

一般化されたオプション型モデル

- **満期前のデフォルトを考慮するモデル**
  (Black-Cox(‘76), LongStaff-Schwartz(‘92)**など**)
  - **企業の資産価値がある水準を下回った時点でデフォルトと認定**
  - **マートン・モデルよりもデフォルト確率が大きく算出される**
  - **マートン・モデルのようにデフォルトと負債構造の関係が明確ではない。**



さらに発展したオプション型モデル

- 負債額水準（デフォルト水準）が時間や状態変数に依存するモデル

- 資産価値にジャンプの可能性を許したモデル
  - 企業の資産価値がある水準を下回った時点でデフォルトと認定
    →突然デフォルトするという状態を表現できる。

- 資産価値あるいはデフォルト水準が完全に観測できないという定式化をしているモデル
  →突然デフォルトするという状態を表現できる。

社債の利回りスプレッド

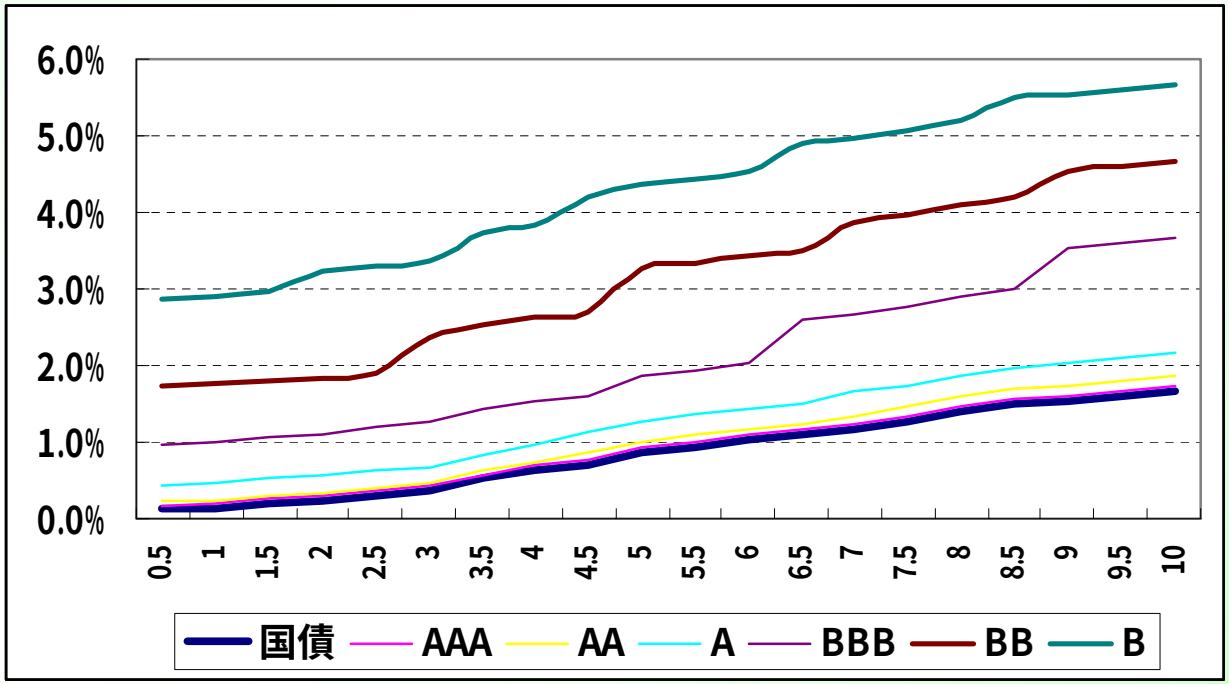
- スプレッド＝社債利回り－国債利回り
  （信用リスク・プレミアムの金利表現と見なせる）
- 利回りは、一般には以下の方程式の解として計算される。

$$\text{市場の社債価格} = \sum_{t=1}^{T} \frac{\text{クーポン}}{(1+\text{社債利回り})^{t}} + \frac{\text{額面}}{(1+\text{社債利回り})^{T}}$$

T : クーポン支払回数

社債の利回りスプレッド

- スプレッドの傾向・・・ほとんど格付けで説明される



※実際のデータから作成したものではない

リスク中立デフォルト確率

- 社債のスプレッドの大きさと、発行企業のリスク中立なデフォルト確率とを結びつけることは理論的に可能
  (Duffie-Singleton(’99)など)
- 「リスク中立なデフォルト確率」はクレジット・デリバティブの評価などに応用される。

格付推移行列

- 実際には「格付」が企業の信用リスクをかなりの割合で説明している。
- 格付が将来にわたってどのように変化していくかをとらえることは信用リスク管理等で有効と考えられる。
- 格付が1年ごとにどのくらいの確率で推移するかを行列形式で表したものを格付推移行列と呼ぶ。

(R&I のホームページから社数ベースの格付推移行列がダウンロード可能)

格付推移行列

※R&Iのデータより。1994年にそれぞれ格付されていた会社が2003年時点でどの格付に推移していたかを表すマトリックス（Default は10年間に広義デフォルトした企業数、NR は2003年時点で格付を付与されなくなった企業数。Total は1994年時点に各格付を得ていた企業の総数）

1994 to 2003	AAA	AA	A	BBB	BB	B	Default	NR	Total
AAA	4	24	0	0	0	0	0	1	29
AA	0	37	46	11	2	0	1	13	110
A	0	8	99	54	11	0	10	77	259
BBB	0	0	23	62	14	3	17	182	301
BB	0	0	2	0	1	2	6	22	33
B	0	0	0	0	0	0	2	2	4

1994 to 2003	AAA	AA	A	BBB	BB	B	Default	NR	Total
AAA	13.79%	82.76%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	3.45%	100%
AA	0.00%	33.64%	41.82%	10.00%	1.82%	0.00%	0.91%	11.82%	100%
A	0.00%	3.09%	38.22%	20.85%	4.25%	0.00%	3.86%	29.73%	100%
BBB	0.00%	0.00%	7.64%	20.60%	4.65%	1.00%	5.65%	60.47%	100%
BB	0.00%	0.00%	6.06%	0.00%	3.03%	6.06%	18.18%	66.67%	100%
B	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	50.00%	50.00%	100%

格付推移行列

- AAA→1, AA→2 のように表し、K個の格付けを考える。K+1 は「デフォルト」とする。
- $q_{i,j}$ を1年後に格付が i から j へ推移している確率とする。
- 次のように(K+1)次の行列 Q で1年間の格付推移行列を表現し、各成分を何らかの方法で決める。

$$Q = \begin{pmatrix} q_{1,1} & q_{1,2} & \cdots & q_{1,K} & q_{1,K+1} \\ q_{2,1} & q_{2,2} & \cdots & q_{2,K} & q_{2,K+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ q_{K,1} & q_{K,2} & \cdots & q_{K,K} & q_{K,K+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

格付推移行列

- 2年後、3年後･･･の格付推移行列は $Q^2, Q^3, \cdots$ で与えられる
- 景気全体の好調･不調があるため、時期によって格付推移行列も変える必要があると考えて、推移確率が時間や外的変数の関数としてモデル化されることもある。
- 1年程度だと、格付けが動かない確率が最も大きく、2つ以上変化する確率は極めて小さい。このことをふまえて、格付推移行列に単純な仮定（例えば1年間に2段階格付けが変化する確率は0）をおくこともある。