イノベーションマネジメント研究科
技術経営専攻

金融リスク・マネジメント

第2講：リスクと確率

東京工業大学イノベーションマネジメント研究科
中川　秀敏
E-mail: nakagawa@mot.titech.ac.jp
Office Hour : 17:00-18:30, every Tuesday, at W9-105

※講義資料は、講義前日の午後5時までにはアップするので事前に
http://www.craft.titech.ac.jp/~nakagawa/dir2/lecture.html#TIT2005_1
から各自でダウンロードして用意すること。

Agenda

- リスクの表現方法
  - ダウンサイド・リスク
  - ボラティリティ
  - リスク感応度
- 復習：確率論の基礎
  - 確率とは？
  - 確率変数と確率分布
  - 正規分布
  - 正規分布をもとにしたリスクの計算例

今回（と次回）の問題

- TOPIX（東証株価指数）の「リスク」を過去の日次データを用いて計測する。

$$TOPIX = \frac{\text{算出時の東証一部株価時価総額}}{\text{1968年1月4日終値ベースの時価総額}} \times 100$$

- CASE
  - TOPIX連動型の投資信託を1億円購入することを検討している。そのために、この投資信託のポジションの「リスク」を上層部に説明しなければならない。さて、どうする？

Uncertainty と Risk

- Uncertainty: **ある対象の不確定要素について「法則」すら分かっていない不確実性**
  - **確率分布を特定することが不可能な状況**

- Risk: **不確定要素について「法則」は分かる、または仮定できる不確実性（≠危険）**
  - **確率分布を特定したうえで議論可能**

- **金融における不確定要因は一般に「リスク」と称するので、以後は上の区別と関係なく、定量化する（あるいはされた）不確実性を「リスク」と呼ぶことにする。**

「リスク」の表現

① 「将来どのくらい損を被るか」という「想定すべき損害の程度」という観点
  - 例えば、1年後に資産価値が**どのくらい目減りする可能性**があるか？

② 「将来資産価値がおよそどのくらいの値の範囲に収まるか」という「不確実性の度合い」という観点
  - 例えば、1年後の資産価値が、**およそ何円～何円の範囲**に収まるか？

③ 対象に影響を与える要素が現段階で1単位変動したときに、その対象の価値がどれだけ変化するか
  - 例えば、**あるマクロ変数が1単位減少**すると、その**資産価値はどのくらい増加 or 減少**するか？

「リスク」の表現

- 前ページの①②のポイントは、**現時点で確定していない将来の資産価値**を考える必要があるということ。
- 従って、不確定な事象を定量化するために「**確率**」の言葉で表現することが不可欠となる。
  - 1年後に95%の確率で起こりうる最大損失額は□□円である。
  - 1年後の資産価値は70%の確率で、○○円～△△円の範囲に収まる

「リスク」の表現

- 前々ページの③のポイントは、現時点で、対象となる資産とリスク要因の関係が明示できる必要があるということ。
- 従って、対象としている資産価値を変動させるリスクの源泉をきちんと見極めることが重要。
  - 債券価格に対する「最終利回り」
  - 材料価格に対する原料価格、為替レート、物価指数など

「リスク」の評価指標

① ダウンサイド・リスク：収益率分布の下方（損失側）部分に焦点をあて、どの程度の損失を想定しておくかを示す値。Value at Risk が典型例。

② ボラティリティ（収益率（リターン）の分布の標準偏差）が代表的。絶対偏差などで表現することも。

③ リスク感応度：規準となる経済指標や市場指標（金利、為替レート、株価指数など）が1単位変化したときのポートフォリオ価値の変化量

（参照）山下智志「市場リスクの計量化とVaR」朝倉書店

※ファイナンスの世界では、「リターン」と対となる「リスク」概念としてはボラティリティを指すのが一般的。
全体のリスク管理部署では、何らかのダウンサイド・リスクを考慮するのが通常。

確率論の基礎

- 確率とは
- 確率変数と確率分布
- 知っておきたい確率分布～正規分布

確率論の基礎

- 確率論はリスク分析の理論の土台
- デリバティブ価格理論などへも幅広く応用されている
- ただし、確率論は「確率はどう与えられるべきか」といった哲学的な問題に取り組む理論ではなく、「確率が与えられたときにどのようなことが分かるか」を追究する理論である。

確率とは

- あるイベントが発生する確からしさを0以上１以下の数値 (%表示では、０%～１００%で表現される)
- コインの裏表やサイコロ投げの確率は分かりやすいが、一般のイベントに対する「確率」の考え方は非常にあいまい
  - 例えば「降水確率」とは？
  - この講義後半で扱う「デフォルト確率」とは？

確率とは

- 「デフォルト確率」を例にとって、確率の表現と性質を整理する。
  - A：ある企業α社が1年以内にデフォルトするというイベント
  - P(A)：Aという事象が起こる確率
    - Pは英語で確率を表す Probability の頭文字
    - 0≦P(A)≦1 を満たさなければならない。
    - Aが起きない確率＝1－P(A)

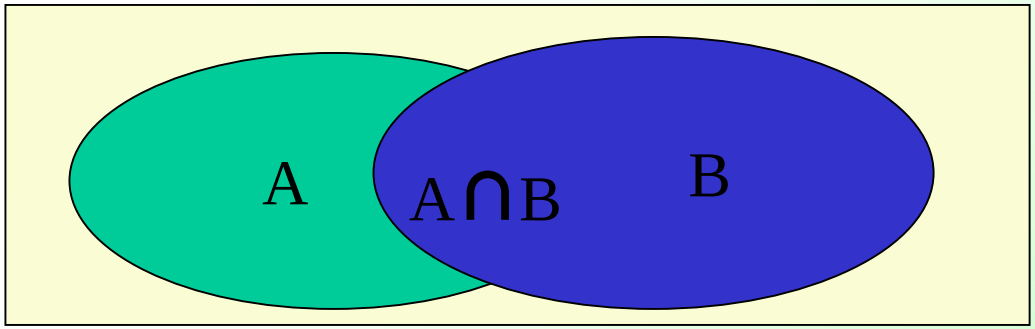
確率とは

- もう1社登場させて見ましょう
  - B：別の企業β社が1年以内にデフォルトするというイベント
  - 2社あったときに気になるのは・・・
    - A∩B：AとBが同時に起こる＝α社もβ社も1年以内にデフォルトする
    - A∪B：AまたはBが起こる＝α社かβ社の少なくともどちらか一方は1年以内にデフォルトする

確率とは

- **確率計算（その1）**
  - $P(A \cap B)$：AとBが同時に起こる確率
  - $P(A \cup B)$：AまたはBが起こる確率

加法定理：$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$



確率とは

- **条件付き確率の計算**
  - P(A｜B)：B**が起きたという条件のもとで、**A**が起こる確率**

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

確率とは

- 条件付き確率の計算（つづき）
  - 乗法定理：$P(A \cap B) = P(A \mid B)P(B)$
  - $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ （すなわち $P(A \mid B) = P(A)$）が成り立つとき、イベント A と B は独立であるという
  - ただし、条件付き確率の考え方は、本質的な連鎖デフォルトについての因果関係を示すものではないことに注意
    （発生の順序も無視されているので、必ずしもβ社のデフォルト後にα社がデフォルトする場合を考えるわけではない）

確率変数と確率分布

- 最初のTOPIXのリスクの問題に戻る。
- TOPIXの値そのものではなく、次のように計算される「日次収益率（リターン）」に注目する。

$$\text{日次リターン} = \frac{\text{TOPIX終値} - \text{前日のTOPIX終値}}{\text{前日のTOPIX終値}}$$

- 明日のリターンは今日の時点では不確実であることに注意。

確率変数と確率分布

- 現時点ではわからない将来の値を表現する道具が「確率変数」
- 確率変数を考える際に重要なことは
  - どのような値をとりうるか？
  - それぞれの値がどのような確率で起こるか？
- 確率変数の取りうる値とその確率の組み合わせを表したものが「確率分布」

確率変数と確率分布

- 例) サイコロを1回投げる場合
  - サイコロの出る目も「確率変数」としてとらえることができる。
  - サイコロの出る目をXという記号で表す
  - X のとりうる値は $\{1,2,3,4,5,6\}$
  - 確率分布は次のようになる

$$P(X=1)=\cdots=P(X=6)=\frac{1}{6}$$

確率変数と確率分布

- 例) サイコロを1回投げる場合 (別の例)
  - 偶数が出たら出た目の2倍を得点、奇数が出たら0点というゲームにおける得点も「確率変数」としてとらえることができる。
  - 上のゲームの得点をXという記号で表す
  - X のとりうる値は $\{0,4,8,12\}$
  - 確率分布は次のようになる

$$P(X=0)=\frac{1}{2},\ P(X=4)=P(X=8)=P(X=12)=\frac{1}{6}$$

確率変数と確率分布

- TOPIXの日次リターンを確率変数で表す場合は・・・
  - 取りうる値→連続的（-1以上の実数値）と見なすことが便利
  - 確率→1つ1つの値を取る確率は0と見なさざるを得ない
- 株価や金利などの市場データを扱う場合は、ほとんどの場合、連続値をとる確率変数を扱うことになる。

確率変数と確率分布

- Xを連続値の確率変数とするとき、確率分布は下のような不等式の形で表し、c の関数と見なす。

$$F(c) := P(X \leq c)$$

- FはXの分布関数と呼ばれ、

$0 \leq F(c) \leq 1,\ c$について単調非減少

確率変数と確率分布

- XをTOPIX日次リターンとした場合

$$F(0) = P(X \leq 0)$$

は、日次リターンが負になる確率

$$F(0.1) - F(0.05) = P(0.05 < X \leq 0.1)$$

は日次リターンが5%**超**10%**以下になる確率**

確率変数と確率分布

- XをTOPIX日次リターンとした場合

$$1-F(c)=P(X>c)=0.95$$

を満たすcは・・・

1年後に95%の確率で起こりうる最大損失額
(Value at Risk)

上を満たすcは

$$F(c)=P(X\leq c)=0.05$$

を満たす

※数学的には少し不正確な書き方ですが、直観的な理解には問題ありません。

確率変数と確率分布

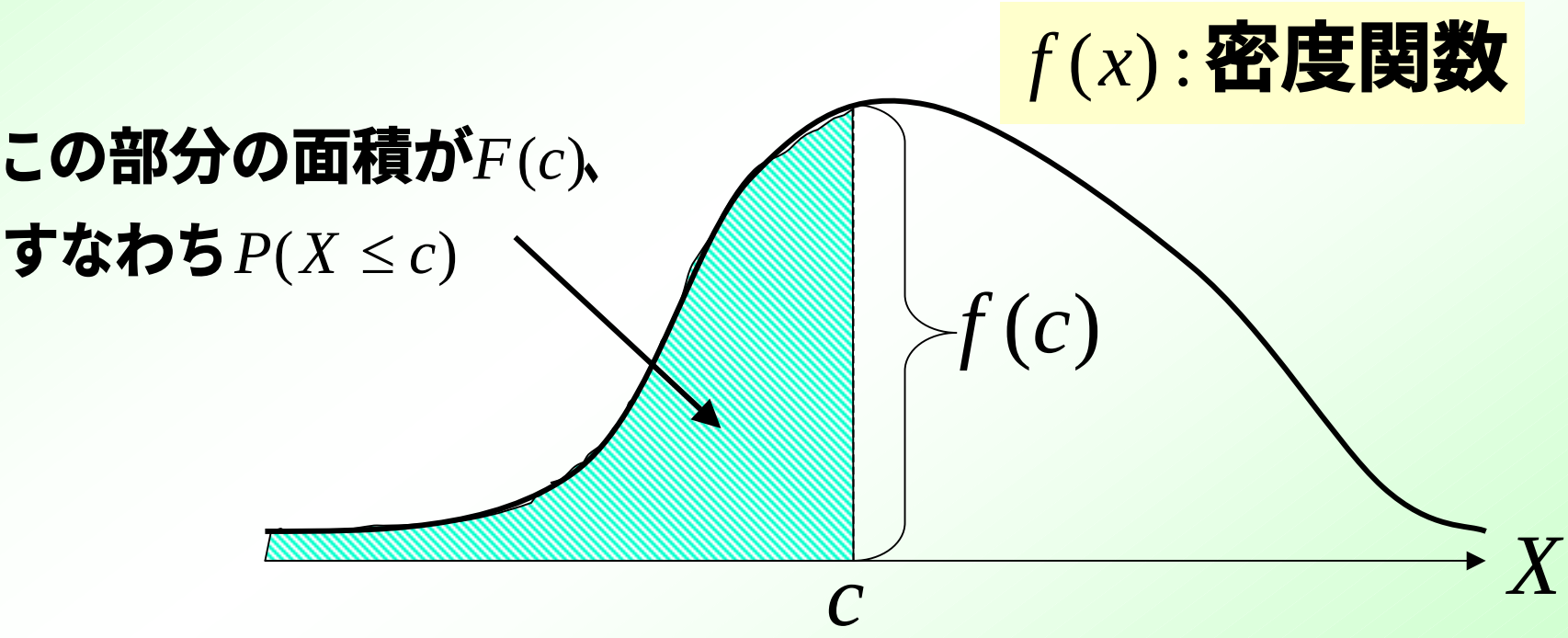
- もし、分布関数Fが、別の関数 f を用いて下のように積分（離散値の場合は和）の形で書けると、計算上便利なことが多い。

$$F(c) = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx$$

- fはXの確率密度関数と呼ばれる。
- 密度関数 f は分布関数Fを微分して求める。

確率変数と確率分布

- 密度関数と分布関数の関係

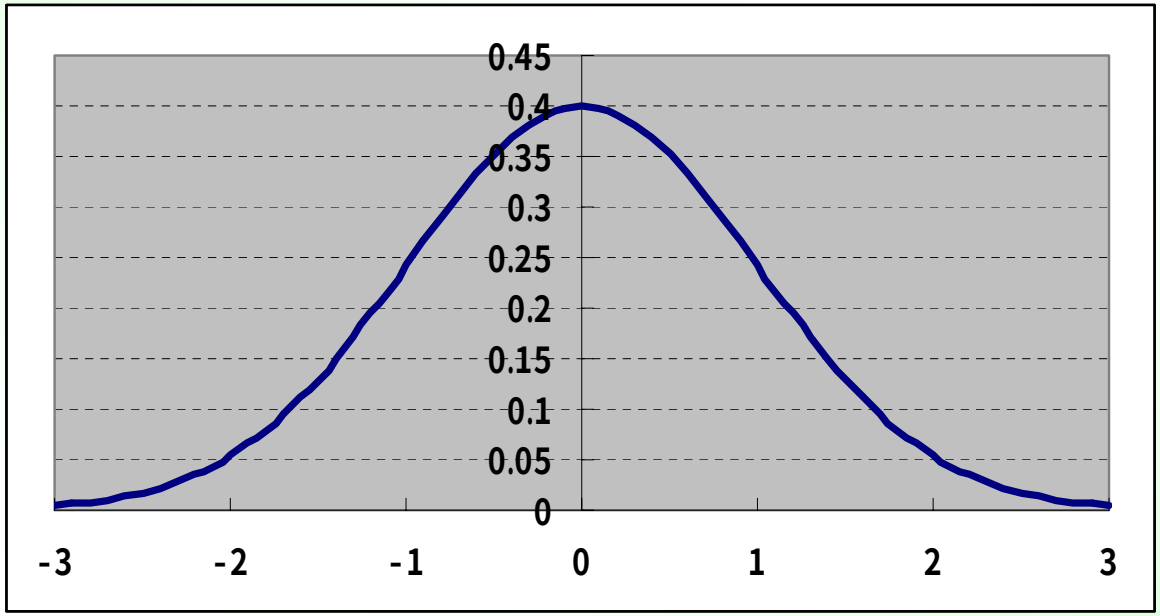


知っておきたい確率分布～正規分布

- **正規分布**(Normal Distribution)
  - 連続値をとる確率変数の確率分布の中で特に重要な働きをする
    - 収益率（リターン）の分布として良く用いられる
    - 中心極限定理（同じ分布に従う確率変数の独立な観測値の和の分布は観測数を増加させると正規分布に近づいていく）
  - 平均と分散（＝標準偏差の2乗）の2つのパラメータで決定される
    （平均、分散、標準偏差の統計的意味については次回）

知っておきたい確率分布～正規分布

- 標準正規分布（平均0,分散1）の密度関数グラフ



- 平均＝中央値のところが最も密度が高い
- 平均に関して左右対称

知っておきたい確率分布～正規分布

- Xが標準正規分布（平均0,分散1）に従うとき

$$P(X \geq 0) = P(X \leq 0) = 0.5$$

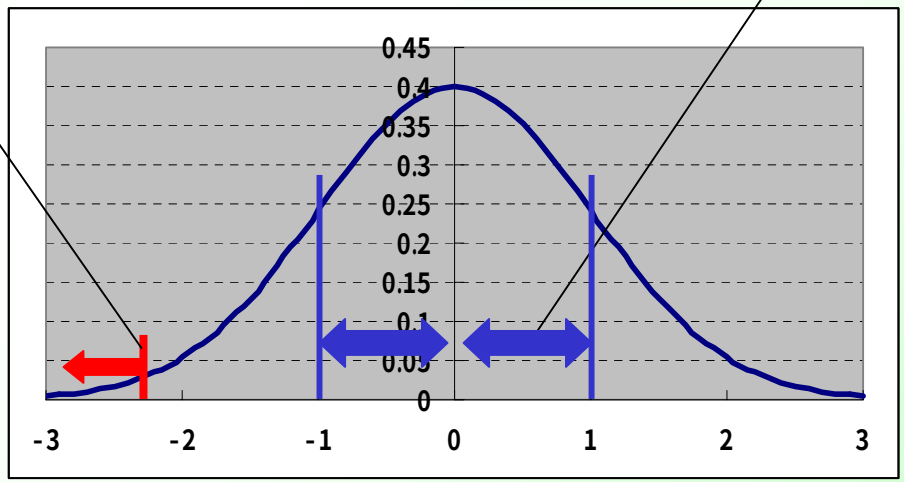
$$P(-1 \leq X \leq 1) \cong 0.6827$$

$$P(-1.96 \leq X \leq 1.96) \cong 0.95$$

$$P(X \leq -2.33) \cong 0.99$$

99%VaR

ボラティリティ



知っておきたい確率分布～正規分布

標準正規分布関数に対しては
NORMSDIST(c) がある

- **正規分布の計算** (Excel)
  - NORMDIST(c, **μ**, **σ**,TRUE or FALSE)
  - **4番目の引数を** TRUE **にすると「分布関数」**

$$F(c) = \int_{-\infty}^{c} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

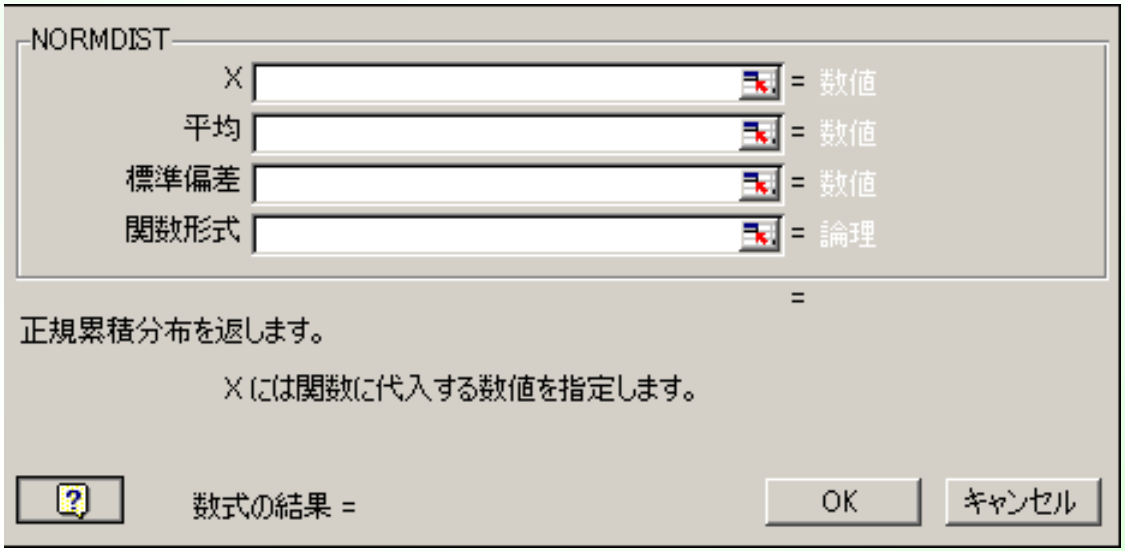
  - **4番目の引数を** FALSE **にすると「密度関数」**

$$f(c) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(c-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

NORMDIST(0, 0, 1,TRUE) **＝？**, NORMDIST(0, 0, 1, FALSE) **＝？**

知っておきたい確率分布～正規分布

– 関数ウィザードで NORMDIST 関数を利用



知っておきたい確率分布～正規分布

標準正規分布関数の逆関数に対しては
NORMSINV(p) がある

- **正規分布の逆関数**
  - NORMINV(p, **μ**, **σ**)
  - **確率** p **が与えられたときに下の関係式を満たす** c **の値を求める**

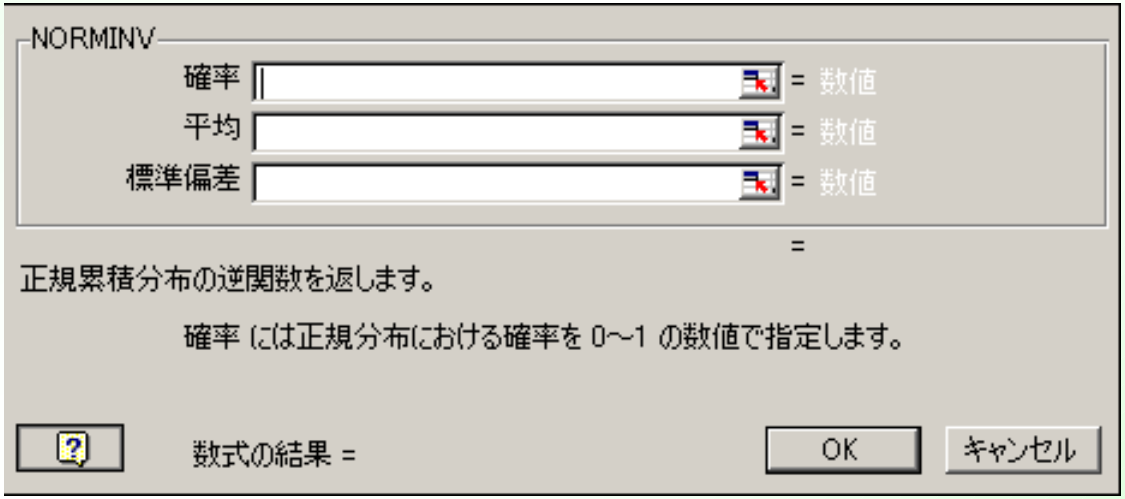
?

$$p = \int_{-\infty}^{c} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

NORMINV(0.95, 0,1) = **?**

知っておきたい確率分布～正規分布

– 関数ウィザードで NORMINV関数を利用



知っておきたい確率分布

- その他知っておくと役立つ分布
  (信用リスクやオペレーショナル･リスクのモデルでしばしば登場)
  - 二項分布 (BINOMDIST関数)
    - 2つの値しかとらない試行を考える場合
  - ポアソン分布 (POISSON関数)
    - イベントの件数を考える場合
  - 指数分布 (EXPONDIST関数)
    - あるイベントが発生するまでの時間を考える場合

日次リターンが正規分布に従う場合

- 日次リターンXが平均μ、標準偏差（ボラティリティ）σに従うとすると、
  - <u>１日後</u>に99%の確率で起こりうる最大損失額

$$1\text{億円} \times \{2.33 \times \sigma - \mu\}$$

99%VaR

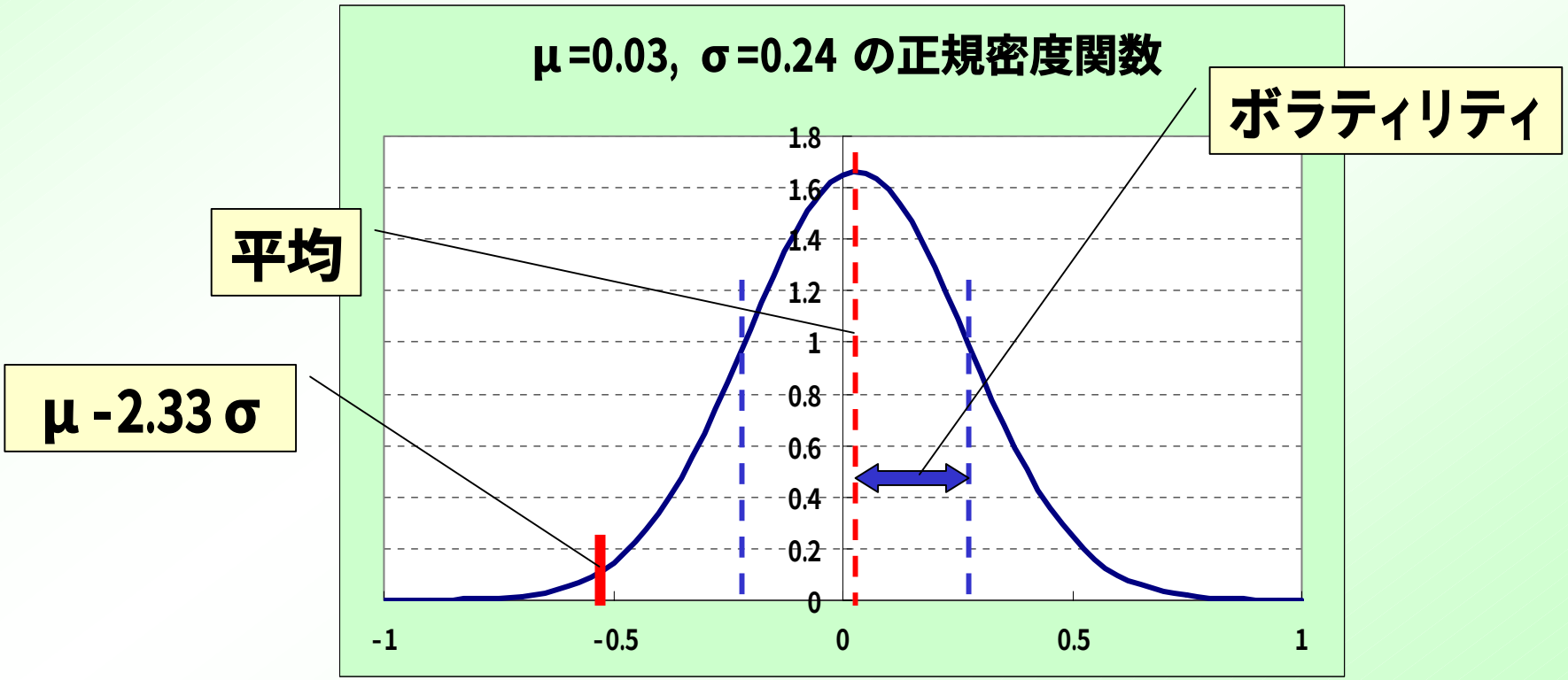
  - <u>１日後</u>の資産価値は95%の確率で次の範囲に含まれる

$$1\text{億円} \times \{(1+\mu) - 1.96 \times \sigma\}$$
$$\sim 1\text{億円} \times \{(1+\mu) + 1.96 \times \sigma\}$$

日次リターンが正規分布に従う場合

例えば、μ=0.03, σ=0.24 のとき、前ページの99%VaRは

$$1\text{億円} \times \{2.33 \times 0.24 - 0.03\} = 5{,}292\text{万円}$$



日次リターンが正規分布に従う場合

- 正規分布においては、標準偏差σは

$$P(\mu-\sigma \le X \le \mu+\sigma) \cong 0.6827$$

を満たす。要するに約68%の確率で正規分布に従う変数は、平均μを中心として両側にσだけの範囲に入ることを表す。

つまり、リスクをボラティリティで表現するということは、7割近い確率でリターンが入る範囲を指定することと同義。

- 変数Xが、平均μ、標準偏差σの正規分布に従うとすると

$$\frac{X-\mu}{\sigma}$$

は標準正規分布に従う変数となる。

次回は･･･

- 実際にTOPIXの過去データを用いて、TOPIX日次リターンを表す確率変数がどのようなものかを考える
  →正規分布を仮定して考える
- 日次リターンと同様に、月次リターンや年次リターンを考えれば、より長い期間に対するリスクも考えられる？